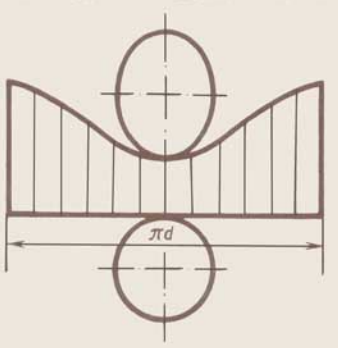
V. O. GORDON
M. A. SEMENTSOV - OGUIYEVSKI

CURSO DE GEOMETRIA DESCRIPTIVA



EDITORIAL MIR
MOSCU


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

В. О. ГОРДОН,
М. А. СЕМЕНЦОВ-ОГИЕВСКИЙ

КУРС
НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ
ГЕОМЕТРИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

V. O. GORDON
M. A. SEMENTSOV-OGUIYEVSKI

CURSO DE GEOMETRIA DESCRIPTIVA

TRADUCCIÓN DEL RUSO
Segunda edición

EDITORIAL MIR MOSCU

На испанском языке

Primera edición 1973
Segunda edición 1980

Impreso en la URSS
1980

INDICE

Introducción 9

Capítulo I. FORMACIÓN DE LAS PROYECCIONES 11
§ 1. Proyecciones centrales 11
§ 2. Proyecciones paralelas 13
§ 3. Método de Monge 15
Preguntas al capítulo I 16

Capítulo II. PUNTO Y RECTA 17
§ 4. El punto en el sistema V, H 17
§ 5. El punto en el sistema V, H, W 20
Preguntas a los §§ 4 y 5 22
§ 6. Proyecciones ortogonales y sistema de coordenadas rectangulares 22
§ 7. Los puntos en los cuadrantes y octantes del espacio. 25
Preguntas a los §§ 6 y 7 28
§ 8. Formación de sistemas auxiliares de planos de proyección 28
§ 9. Dibujos sin indicación de los ejes de proyección 30
Preguntas a los §§ 8 y 9 32
§ 10. Proyección del segmento de una línea recta 32
§ 11. Posiciones particulares de una línea recta respecto de los planos de proyección 35
§ 12. El punto sobre una recta. Trazas de una recta 38
Preguntas a los §§ 10—12 42
§ 13. Construcción del segmento de una recta de posición general y de los ángulos de inclinación de la recta a los planos de proyección V y H en el dibujo de tamaño natural 43
§ 14. Posición recíproca de dos rectas 47
§ 15. Sobre las proyecciones de ángulos planos 50
Preguntas a los §§ 13—15 55

Capítulo III. EL PLANO 56
§ 16. Diferentes métodos de representación de un plano en el dibujo 56
§ 17. Trazas de un plano 57
§ 18. La recta y el punto en el plano. Rectas de posición particular 59
Preguntas a los §§ 16—18 66
§ 19. Posición de un plano respecto a los planos de proyección 66
Preguntas al § 19 73
§ 20. Trazado del plano proyectante por una línea recta . . . 73
§ 21. Construcción de las proyecciones de figuras planas . . . 74
Preguntas a los §§ 20 y 21 83

Capítulo IV. POSICION RECIPROCA DE DOS PLANOS, DE UNA LÍNEA RECTA Y UN PLANO 84
§ 22. Examen de las posiciones recíprocas de dos planos, de una línea recta y un plano 84
§ 23. Intersección de una línea recta con un plano perpendicular a uno o a dos planos de proyección 87
§ 24. Construcción de la línea de intersección de dos planos 89
Preguntas a los §§ 22—24 93
§ 25. Intersección de una línea recta con un plano de posición general 94
§ 26. Construcción de la línea de intersección de dos planos por los puntos de intersección de las líneas rectas con el plano 96
Preguntas a los §§ 25 y 26 98
§ 27. Construcción de una línea recta y un plano paralelos entre sí 98
§ 28. Construcción de planos recíprocamente paralelos . . 100
Preguntas a los §§ 27 y 28 101
§ 29. Construcción de una recta y un plano recíprocamente perpendiculares 101
§ 30. Construcción de planos recíprocamente perpendiculares 106
§ 31. Construcción de las proyecciones del ángulo formado por una recta y un plano y por dos planos 108
Preguntas a los §§ 29—31 110

Capítulo V. MÉTODOS DE CAMBIO DE LOS PLANOS DE PROYECCIÓN Y DE GIRO 111
§ 32. Reducción de las líneas rectas y las figuras planas a las posiciones particulares respecto a los planos de proyección 111
§ 33. Método de cambio de los planos de proyección . . . 112
Preguntas a los §§ 32 y 33 117
§ 34. Fundamentos del método de giro 117
§ 35. Giro de un punto, un segmento de recta y un plano alrededor de un eje perpendicular al plano de proyección 118
Preguntas a los §§ 34 y 35 123
§ 36. Empleo del método de giro sin indicación en el dibujo de los ejes de giro perpendiculares a los planos de proyección *V* o *H* 124
§ 37. Giro de un punto, un segmento de recta y un plano alrededor de un eje paralelo al plano de proyección, y alrededor de la traza de un plano 127
Preguntas a los §§ 36 y 37 134
§ 38. Ejemplos de resolución de problemas con el empleo del método de cambio de los planos de proyección y el método de giro 134
Preguntas al § 38 147

Capítulo VI. REPRESENTACIÓN DE POLIEDROS 149
§ 39. Construcción de las proyecciones de los poliedros . . 149
§ 40. Dibujos de prismas y pirámides 151
§ 41. Sistema de disposición de las representaciones en los dibujos técnicos 157
§ 42 Intersección de los prismas y las pirámides por un plano y una recta 160
Preguntas a los §§ 39—42 165

§ 43. Intersección de una superficie poliédrica por otra . . . 166
§ 44. Procedimientos generales de desarrollo de superficies poliédricas (prismas y pirámides) 170
Preguntas a los §§ 43—44 174

Capítulo VII. LÍNEAS CURVAS 175

§ 45. Conocimientos generales sobre las líneas curvas y su proyección 175
§ 46. Curvas planas 178
§ 47. Curvas espaciales 182
Preguntas a los §§ 45—47 184
§ 48. Líneas helicoidales: cilíndricas y cónicas 184
Preguntas al § 48 192

Capítulo VIII. SUPERFICIES CURVAS 193

§ 49. Conocimientos generales sobre las superficies curvas 193
§ 50. Examen de ciertas superficies curvas, su determinación y representación en el dibujo 196
A. Superficies regladas desarrollables 196
B. Superficies regladas alabeadas 201
C. Superficies curvas (no regladas) 208
D. Superficies dadas por su estructura 210
E. Superficies gráficas 211
Preguntas a los §§ 49 y 50 211
§ 51. Superficies de revolución 212
Preguntas al § 51 220
§ 52. Superficies helicoidales y tornillos 221
Preguntas al § 52 230
§ 53. Trazado de planos tangentes a las superficies curvas 230
§ 54. Ejemplos de construcción de los contornos de las proyecciones de un cuerpo de revolución con eje inclinado 234
Preguntas a los §§ 53 y 54 237

Capítulo IX. INTERSECCIÓN DE LAS SUPERFICIES CURVAS POR UN PLANO Y UNA RECTA 238

§ 55. Procedimientos generales de construcción de la línea de intersección de una superficie curva por un plano . . 238
§ 56. Intersección de una superficie cilíndrica por un plano. Construcción del desarrollo 240
Preguntas a los §§ 55 y 56 247
§ 57. Intersección de una superficie cónica por un plano. Construcción del desarrollo 248
Preguntas al § 57 260
§ 58. Intersección de una esfera y un toro por un plano. Ejemplo de construcción de la «línea de corte» en la superficie de un cuerpo de revolución compuesto 260
§ 59. Intersección de las superficies curvas por una recta 265
Preguntas a los §§ 58 y 59 271

Capítulo X. INTERSECCIÓN DE UNA SUPERFICIE POR OTRA, DE LAS CUALES POR LO MENOS UNA ES CURVA 272

§ 60. Método general de construcción de la línea de intersección de una superficie con otra 272
§ 61. Elección de los planos secantes auxiliares en los casos cuando éstos pueden cortar a ambas superficies según líneas rectas 274

§ 62. Aplicación de los planos secantes auxiliares paralelos a los planos de proyección 280
Preguntas a los §§ 60—62 282
§ 63. Algunos casos particulares de intersección de una superficie con otra 283
§ 64. Aplicación de las esferas secantes auxiliares 288
§ 65. Proyección de la línea de intersección de dos superficies de revolución de segundo orden sobre un plano paralelo a su plano de simetría común 296
Preguntas a los §§ 63—65 303
§ 66. Ejemplos de construcción de las líneas de intersección de una superficie con otra 304
§ 67. Intersección de una línea curva con una superficie curva 314
Preguntas a los §§ 66 y 67 316

Capítulo XI. DESARROLLO DE LAS SUPERFICIES CURVAS 317
§ 68. Desarrollo de superficies cilíndricas y cónicas 317
§ 69. Desarrollo convencional de una superficie esférica 321
§ 70. Ejemplos de construcción del desarrollo de algunas formas 322
Preguntas al capítulo XI 327

Capítulo XII. PROYECCIONES AXONOMÉTRICAS 328
§ 71. Conocimientos generales 328
§ 72. Proyecciones axonométricas rectangulares. Coeficiente de reducción y ángulos entre los ejes 333
§ 73. Construcción de la proyección axonométrica rectangular de una circunferencia 341
§ 74. Ejemplos de construcciones en las proyecciones isométrica y dimétrica 352
§ 75. Algunas proyecciones axonométricas oblicuas . . . 359
Preguntas al capítulo XII 362

Apéndice 363
§ 76. Sobre la correspondencia afín y su aplicación a la resolución de ciertos problemas 363
Preguntas al § 76 371

INTRODUCCIÓN

Entre las disciplinas que constituyen el fundamento de la instrucción de ingenieros se encuentra la *Geometría Descriptiva*.

La Geometría Descriptiva tiene por objeto la exposición y la argumentación de los métodos de construcción de las imágenes de las formas espaciales sobre un plano y los métodos de resolución de problemas de carácter geométrico por las imágenes dadas de estas formas [1].

Las imágenes construidas por las reglas estudiadas en la Geometría Descriptiva permiten darse una idea de la forma de los objetos y de su disposición mutua en el espacio, determinar sus dimensiones, estudiar las propiedades geométricas propias del objeto representado.

La Geometría Descriptiva, provocando un trabajo intensivo de la imaginación espacial, la desarrolla.

Por fin, la Geometría Descriptiva, transmite una serie de sus deducciones a la práctica de ejecución de dibujos técnicos, asegurando su carácter expresivo y su precisión y, por consiguiente, la posibilidad de realización de los objetos representados.

Las reglas de construcción de las imágenes, expuestas en la Geometría Descriptiva, se basan en el *método de proyecciones*.

El estudio del método de proyecciones se inicia con la construcción de las proyecciones del *punto*, puesto que al construir la imágen de cualquier forma espacial se examina una serie de puntos pertenecientes a esta forma.

---

[1] Las formas espaciales pueden ser representadas no sólo sobre un plano, sino también sobre cualquier otra superficie, por ejemplo, cilíndrica o esférica, lo cual se estudia en apartados especiales de la Geometría Descriptiva.

I
CAPÍTULO

FORMACIÓN DE LAS PROYECCIONES

§ 1. PROYECCIONES CENTRALES

Para obtener las *proyecciones centrales* (*proyección central*), deben ser dados el *plano de proyección* y el *centro de proyección*, un punto exterior a este plano (fig. 1: el plano P y el punto S). Tomando cierto punto A y trazando por S y A una línea recta hasta su intersección con el plano P, obtenemos el punto a_p. De la misma manera

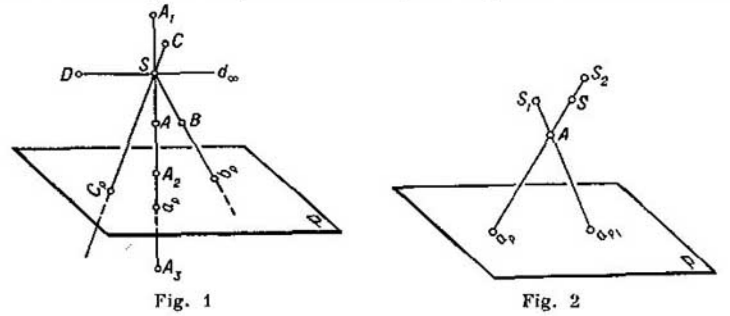


Fig. 1 Fig. 2

procedemos, por ejemplo, con los puntos B y C. Los puntos a_p, b_p y c_p son las *proyecciones centrales* de los puntos A, B y C sobre el plano P; éstos se obtienen en la intersección de las *rectas proyectantes* (o, de otra manera, rayos proyectantes) SA, SB y SC con el plano de proyección [1].

[1] Al centro de proyección se le llama también *polo de proyección*, y a la proyección central, *proyección polar*.

Si para cierto punto D (fig. 1) la recta proyectante resulta paralela al plano de proyección, se ha aceptado considerar que éstos se cruzan en un punto infinitamente alejado: el punto D tiene también su proyección, pero infinitamente alejada (d_∞).

Tomando un nuevo centro de proyección S_1 (fig. 2), sin variar la posición del plano P, obtenemos una nueva proyección del punto A, el punto a_{p1}. Si se toma el centro S_2 en la misma recta proyectante SA, la proyección a_p permanece invariable.

Así pues, dados el plano de proyección y el centro de proyección (fig. 1) se puede construir la proyección del punto; pero, disponiendo de la proyección (por ejemplo, a_p) no se puede determinar por ella la posición del propio punto A en el espacio, puesto que cualquier punto de la recta proyectante SA se proyecta en un mismo punto; para una solución única, evidentemente, se necesitan condiciones suplementarias.

La proyección de una línea puede ser construida proyectando una serie de sus puntos (fig. 3). En este caso, las rectas proyectantes forman en su conjunto una superficie cónica [1] o pueden resultar en un mismo plano (por ejemplo, al proyectar una línea recta que no pase por el centro de proyección, o una quebrada y una curva, todos los puntos de las cuales están situados en un plano coincidente con el proyectante).

Evidentemente, la proyección de una línea se obtiene en la intersección del plano proyectante con el plano de proyección (fig. 3).

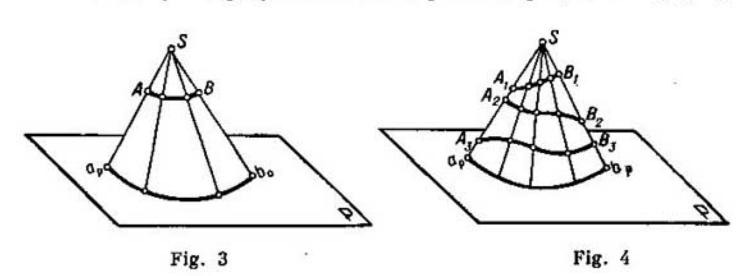


Fig. 3 Fig. 4

Pero, como muestra la fig. 4, la proyección de una línea no determina a la línea proyectada, puesto que en la superficie proyectante se pueden disponer toda una serie de líneas que tendrán por proyección una misma línea en el plano de proyección.

De la proyección del punto y la línea se puede pasar a la proyección de una superficie y un cuerpo.

---

[1] En relación con esto, las proyecciones centrales se llaman también *cónicas*. La noción sobre superficie cónica véase en Estereometría.

§ 2. PROYECCIONES PARALELAS

Examinemos ahora el método de proyección llamado *paralelo*.

Acordemos de considerar a todas las rectas proyectantes paralelas. Para poder trazarlas deberá ser indicada cierta dirección (véase la flecha en la fig. 5). *Las proyecciones así construidas se llaman paralelas.*

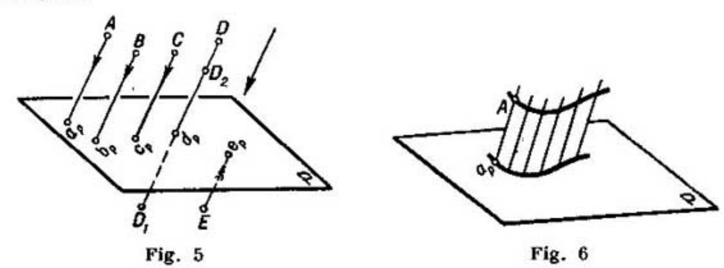


Fig. 5

Fig. 6

La proyección paralela puede ser examinada como un caso particular de la central, admitiendo que el centro de proyección está infinitamente alejado.

Por consiguiente, *llamaremos proyección paralela de un punto, al punto de intersección de la recta proyectante, trazada paralelamente a la dirección dada, con el plano de proyección.*

Para obtener la proyección paralela de una línea, se puede construir las proyecciones de una serie de sus puntos y unir estas proyecciones con una línea (fig. 6).

En este caso, las rectas proyectantes forman en su conjunto una superficie cilíndrica; por esta razón, a las proyecciones paralelas se las llama también *cilíndricas* [1].

En las proyecciones paralelas, así como en las centrales:

1) la superficie proyectante para una línea recta, en el caso general, es un plano, por lo cual, la línea recta se proyecta en general en forma de recta;

2) cada punto y línea en el espacio tienen una sola proyección;

3) cada punto en el plano de proyección puede ser la proyección de una infinidad de puntos, si por éstas pasa una recta proyectante común para todos ellos (fig. 5: el punto d_p es la proyección de los puntos D, D_1 y D_2);

4) cada línea en el plano de proyección puede ser la proyección de una multitud de líneas, si éstas están situadas en un plano proyectante común para todas ellas (fig. 7: el segmento a_pb_p es la pro-

[1] La noción de superficie cilíndrica véase en Estereometría.

yección de los segmentos AB y A_1B_1 y del segmento A_2B_2 de una línea curva plana); para obtener una solución única, evidentemente, se necesitan condiciones suplementarias;

5) para construir la proyección de una recta es suficiente proyectar dos de sus puntos y unir las proyecciones obtenidas de estos puntos con una línea recta;

6) si un punto pertenece a una recta, entonces, la proyección del punto pertenece a la proyección de esta recta (fig. 8: el punto K pertenece a una recta, la proyección k_p pertenece a la proyección de esta recta).

Además de las propiedades enumeradas, para las proyecciones paralelas se pueden señalar las siguientes:

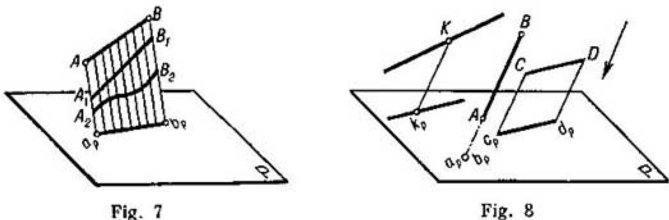


Fig. 7 Fig. 8

7) si la recta es paralela a la dirección de proyección (la recta AB en la fig. 8), la proyección de la recta (o de cualquier segmento de ella) es un punto (a_p, o el mismo b_p);

8) el segmento de una línea recta paralela al plano de proyección, se proyecta sobre el plano en su magnitud natural (fig. 8: $CD = c_pd_p$, como segmentos de rectas paralelas entre líneas paralelas).

Más adelante, serán examinadas algunas propiedades más de las proyecciones paralelas, que muestran las relaciones naturales en los objetos examinados que se conservan en las proyecciones de estos objetos.

Aplicando los procedimientos de proyección paralela del punto y la recta, se pueden construir las proyecciones paralelas de una superficie y un cuerpo.

Las proyecciones paralelas se dividen en oblicuángulas y rectangulares. En el primer caso, la dirección de proyección forma con el plano de proyección un ángulo diferente de 90°; en el segundo caso, las rectas proyectantes son perpendiculares al plano de proyección.

Al examinar las proyecciones paralelas, uno debería imaginarse alejado a una distancia infinitamente grande de la imagen. En realidad, los objetos y sus imágenes se examinan desde una distancia finita; además, los rayos que llegan a la vista del espectador forman una superficie cónica y no cilíndrica. Por consiguiente, una imagen

más natural se obtiene (observando determinadas condiciones) con ayuda de la proyección central y no de la paralela. Por esta razón, cuando se exige que la imagen dé la misma impresión visual que el propio objeto se emplean las proyecciones en perspectiva, cuya base es la proyección central [1].

Pero, la relativamente gran simplicidad de construcción y las propiedades de las proyecciones paralelas, que aseguran la conservación de las relaciones dimensionales naturales, explican la amplia aplicación de la proyección paralela, a pesar de la condicionalidad indicada más arriba.

§ 3. MÉTODO DE MONGE

Los conocimientos y procedimientos de construcción, condicionados a la necesidad de imágenes planas de las formas espaciales, se acumulaban paulatinamente ya desde tiempos remotos. En el transcurso de un largo período las imágenes planas se ejecutaban principalmente como imágenes demostrativas. Con el desarrollo de la técnica, el problema sobre el empleo del método que asegure la precisión y facilidad de medición de las imágenes, es decir, la posibilidad de establecer con precisión la posición de cada punto de la imagen respecto a otros puntos o planos y con ayuda de simples procedimientos determinar las dimensiones de los segmentos de las líneas y de las figuras, ha adquirido un significado trascendental. Las separadas reglas y procedimientos de construcción de tales imágenes, acumulados poco a poco, fueron reducidos a un sistema y desarrollados en la obra del científico francés *Monge* «Géometrie descriptive» editada en el año 1799.

Gaspar Monge (1746—1818) pasó a la historia como un eminente geómetra francés de fines del siglo XVIII y principios del XIX, ingeniero, hombre público y de estado en la época de la revolución de los años 1789—1794 y gobernación de Napoleón I, uno de los fundadores de la famosa Escuela politécnica de París, participante del trabajo de introducción del sistema métrico de pesos y medidas. Siendo uno de los ministros del gobierno revolucionario de Francia, Monge hizo mucho para su defensa de la intervención extranjera y el triunfo de las tropas revolucionarias. Monge no tuvo la posibilidad de publicar inmediatamente su obra con la exposición del método elaborado por él. Teniendo en cuenta la gran importancia práctica de este método para la ejecución de dibujos de objetivos de significado militar y no deseando que el método de Monge se hiciera conocido fuera de las fronteras de Francia, el gobierno francés prohibió la impresión de este libro. Solamente al final del siglo XVIII fue

---

[1] Las proyecciones en perspectiva no entran en el programa del presente curso.

levantada esta prohibición. Después de la restauración de los Borbones, Gaspar Monge fue objeto de persecución, se vio obligado a ocultarse y dio fin a su vida en la miseria. El método expuesto por Monge, *el método de proyección paralela* (*con la particularidad de que se toman las proyecciones rectangulares sobre dos planos de proyección recíprocamente perpendiculares*), asegurando la fuerza de expresión, la precisión y la facilidad de medición de las imágenes de los objetos sobre el plano, fue y sigue siendo el método principal de ejecución de dibujos técnicos.

La palabra *rectangular* se sustituye frecuentemente por la palabra *ortogonal*, formada por las palabras del idioma griego antiguo, que significan «recto» y «ángulo». Más adelante, el término *proyecciones ortogonales* lo emplearemos para designar el sistema de proyecciones rectangulares sobre planos recíprocamente perpendiculares.

En el presente curso se examinan principalmente las proyecciones rectangulares. En caso de que se empleen las proyecciones paralelas oblicuangulas será cada vez especificado.

PREGUNTAS AL CAPITULO I

1. ¿Cómo se construye la proyección central de un punto?
2. ¿En qué caso la proyección central de una línea recta representa un punto?
3. ¿En qué consiste el método de proyección llamado paralelo?
4. ¿Cómo se construye la proyección paralela de una recta?
5. ¿Puede o no la proyección paralela de una recta representar un punto?
6. ¿Cómo se disponen recíprocamente las proyecciones de un punto y una recta dada si el punto pertenece a dicha recta?
7. ¿En qué caso en la proyección paralela el segmento de una recta se proyecta en su magnitud natural?
8. ¿Qué significa «método de Monge»?
9. ¿Cómo se descifra la palabra «ortogonal»?

II
CAPÍTULO

PUNTO Y RECTA

§ 4. EL PUNTO EN EL SISTEMA V, H

Más arriba (§ 2) se ha dicho que la proyección de un punto no determina la posición del punto en el espacio y para establecer la posición de este punto, conociendo su proyección, se necesitan condiciones suplementarias. Por ejemplo, se conoce la proyección rectangular de un punto sobre el plano horizontal de proyección y se indica con marcación numérica la distancia de este punto al plano; el plano de proyección se considera como «plano de nivel de referencia», y la marcación numérica se cuenta *positiva* si el punto en el espacio se encuentra encima del plano de nivel de referencia y, *negativa*, si el punto se encuentra debajo de este plano.

En esto se basa el *método de proyecciones con marcaciones numéricas* [1].

En la exposición ulterior, la determinación de la posición de los puntos en el espacio se realizará por sus proyecciones rectangulares sobre dos y más planos de proyección.

En la fig. 9 se representan dos planos recíprocamente perpendiculares. Adoptémoslos como planos de proyección. Uno de ellos, el designado con la letra H, es horizontal, el otro, designado con la letra V, es vertical. Este último plano se llama *plano frontal* (*vertical*) *de proyección*, y el plano H, *plano horizontal de proyección*. Los planos V y H forman el sistema V, H.

La línea de intersección de los planos de proyección se llama *eje de proyección* (*línea de tierra*). El eje de proyección divide a cada uno de los planos V y H en dos semiplanos. Para este eje aceptaremos la designación x o la denotación en forma de quebrado V/H. De los

---

[1] Este método no se incluye en el programa del presente curso.

cuatro ángulos diedros formados por los planos de proyección, se cuenta el primero aquel cuyas caras llevan en la fig. 9 la designación V y H.

En la fig. 10 se muestra la construcción de las proyecciones de cierto punto A en el sistema V, H. Trazando desde A las perpendiculares a V y H, obtenemos las proyecciones del punto A: la *frontal*, designada por a', y la *horizontal*, designada por a.

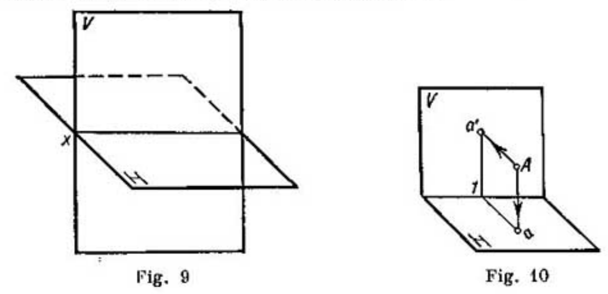


Fig. 9 Fig. 10

Las rectas proyectantes, perpendiculares respectivamente a V y H, determinan un plano perpendicular a los planos y al eje de proyección. En la intersección con V y H, este plano forma dos rectas perpendiculares entre sí $a'1$ y $a1$ que se cortan en el punto 1 en el eje de proyección. Por consiguiente, *las proyecciones de cierto punto están situadas sobre rectas perpendiculares al eje de proyección y que cortan a este eje en un mismo punto.*

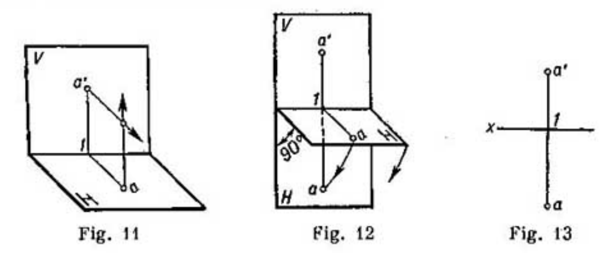


Fig. 11 Fig. 12 Fig. 13

Si se conocen las proyecciones a' y a de cierto punto A (fig. 11), entonces, levantando las perpendiculares de a' al plano V y de a al plano H, obtendremos en la intersección de estas perpendiculares un punto determinado. Así pues, *dos proyecciones de un punto determinan por completo su posición en el espacio respecto al sistema de planos de proyección dado.*

Girando el plano H a un ángulo de 90° alrededor del eje de proyección (en el sentido indicado por las flechas en la fig. 12) obtenemos un solo plano, el plano del dibujo; las proyecciones a' y a se dispondrán sobre una misma perpendicular al eje de proyección (fig. 13), sobre la *línea de referencia*. Como resultado del abatimiento indicado de los planos V y H se obtiene el dibujo conocido bajo el nombre de *diagrama* (*diagrama de Monge*). Este es un dibujo en el sistema V, H (o en el sistema de dos proyecciones rectangulares).

Al pasar al diagrama, hemos perdido el cuadro espacial de disposición de los planos de proyección y el punto. Pero, como veremos más adelante, el diagrama asegura la precisión y facilidad de medición de las imágenes, siendo considerablemente más simple su construcción. Para hacerse por este diagrama una idea del cuadro espacial es necesario un trabajo de la imaginación: por ejemplo, por la fig. 13 hay que imaginarse el cuadro representado en la fig. 10.

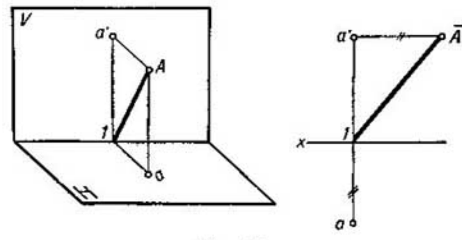


Fig. 14

Puesto que disponiendo del eje de proyección la posición del punto A respecto a los planos de proyección V y H queda determinada, el segmento $a'1$ expresa la distancia del punto A al plano de proyección H (la cota del punto A), y el segmento $a1$, la distancia del punto A al plano de proyección V (el alejamiento del punto A). Del mismo modo se puede determinar la distancia del punto A al eje de proyección. Esta se expresa con la hipotenusa del triángulo construido por los catetos $a'1$ y $a1$ (fig. 14): trazando en el diagrama el segmento $a'\bar{A}$ igual a $a1$ y perpendicular a $a'1$, obtenemos la hipotenusa $\bar{A}1$ que expresa la distancia buscada.

Se debe prestar atención en la necesidad de trazar la *línea de referencia* entre las proyecciones del punto: solamente disponiendo de esta línea, que une mutuamente las proyecciones, se obtiene la posibilidad de establecer la posición del punto que éstas determinan.

Convengamos, a continuación, en llamar al diagrama de Monge, así como a los *dibujos en proyecciones que tienen como base el método*

de Monge (véase el § 3), *simplemente dibujo, comprendiendo lo dicho solamente en el sentido indicado*. En otros casos, la palabra dibujo irá acompañada de la determinación correspondiente (dibujo en perspectiva, dibujo axonométrico, etc.).

§ 5. EL PUNTO EN EL SISTEMA V, H, W

En toda una serie de construcciones y al resolver problemas resulta imprescindible introducir en el sistema V, H otros planos de proyección. Es sabido, que en la práctica de ejecución de dibujos, por ejemplo, de máquinas y sus piezas, el dibujo contiene principalmente no dos, sino una cantidad mayor de representaciones.

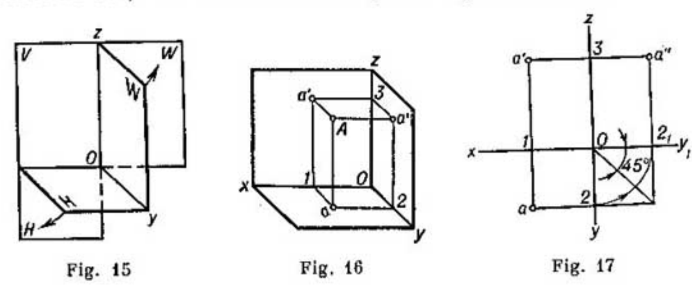


Fig. 15 Fig. 16 Fig. 17

Examinemos la introducción, en el sistema V, H, de un plano de proyección más (fig. 15): el plano designado con la letra W es perpendicular a V y a H. A este plano se le llama *plano de proyección de perfil*. Lo mismo que el plano V, el plano W es vertical. Además del eje de proyección x aparecen los ejes z e y perpendiculares al eje x. Con la letra O se designa el punto de intersección de los tres ejes de proyección. Puesto que el eje $x \perp W$, el eje $y \perp V$, y el eje $z \perp H$, en el punto O coinciden las proyecciones del eje x sobre el plano W, del eje y sobre el plano V y del eje z sobre el plano H.

En la fig. 15 se muestra el esquema de abatimiento de los planos H, V y W sobre un plano. Para el eje y se dan dos posiciones (fig. 17).

La representación demostrativa en la fig. 16 y el dibujo en la fig. 18 contienen las proyecciones horizontal, frontal y de perfil de cierto punto A.

Las proyecciones horizontal y frontal (a y a') se encuentran en una misma perpendicular al eje x, *en la línea de referencia* $a'a$, las proyecciones frontal y de perfil (a' y a''), sobre una misma perpendicular al eje z, *en la línea de referencia* $a'a''$.

En la fig. 17 se muestra la construcción de la proyección de perfil según las proyecciones frontal y horizontal. Se puede hacer uso

o bien del arco de circunferencia trazado desde el punto *O*, o bien de la bisectriz del ángulo yOy_1.

La distancia del punto *A* al plano *H* se mide en el dibujo por el segmento *a'1* o el segmento $a''2_1$, la distancia al plano *V*, por el segmento *a1* o el segmento *a"3*, y la distancia al plano *W*, por el segmento *a2* o el segmento *a'3*. Por esta razón, la proyección *a"* se puede

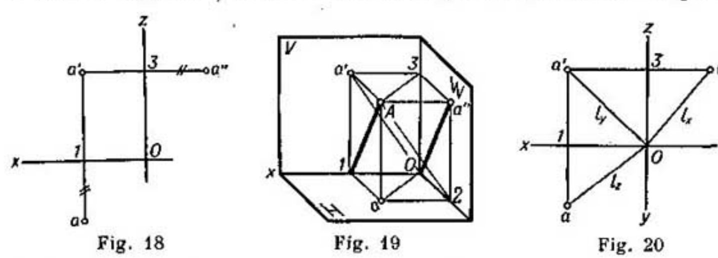


Fig. 18 Fig. 19 Fig. 20

también construir como se muestra en la fig. 18, es decir, trazando en la línea de referencia de las proyecciones *a'* y *a"* a la derecha del eje *z* un segmento igual a *a1*. *Tal construcción es más preferible*.

La distancia del punto *A* al eje *x* (fig. 19) se mide en el espacio por el segmento *A1*. Pero el segmento *A1* es igual al segmento *a"O* (véase la pág. 14, punto 8). Por eso, para determinar la distancia del punto *A* al eje *x* en el dibujo (fig. 20) se debe tomar el segmento designado con l_x.

Análogamente, la distancia del punto *A* al eje *y* se expresa con el segmento l_y y la distancia del punto *A* al eje *z*, con el segmento l_z (fig. 20).

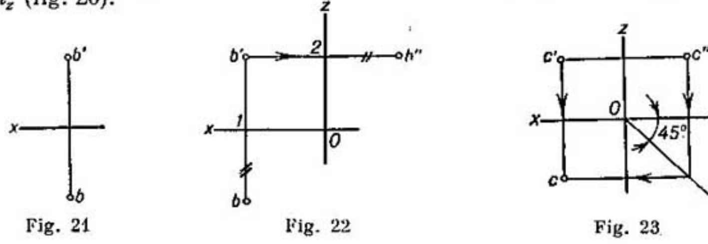


Fig. 21 Fig. 22 Fig. 23

Así pues, *las distancias del punto a los planos de proyección y a los ejes de proyección pueden ser medidas directamente como segmentos determinados en el dibujo*. En este caso debe tenerse en cuenta su escala.

Examinemos algunos ejemplos de construcción de la tercera proyección de un punto por dos dadas. Supongamos (fig. 21) que el punto *B* esté dado por sus proyecciones frontal y horizontal. Introduciendo el eje *z* (fig. 22: la distancia

O1 es arbitraria, si no existe alguna condición) y trazando por el punto b' la línea de referencia perpendicular al eje *z*, trazamos, a la derecha del eje *z*, el segmento $b''2$ igual a *b1*.

En la fig. 23 se ha construido la proyección *c* por las proyecciones dadas c' y c'' (la marcha de la construcción está indicada con flechas).

PREGUNTAS A LOS §§ 4 Y 5

1. ¿Qué supone «sistema *V*, *H*» y cómo se denominan los planos de proyección *V* y *H*?
2. ¿A qué se llama eje de proyección?
3. ¿Cómo se obtiene el dibujo de un punto en el sistema *V*, *H*?
4. ¿Qué significa «sistema *V*, *H*, *W*» y cómo se le llama al plano de proyección *W*?
5. ¿Qué significa «línea de referencia»?
6. ¿Cómo se demuestra que el dibujo que contiene dos proyecciones enlazadas entre sí en forma de puntos expresa cierto punto?
7. ¿Cómo se construye la proyección de perfil de un punto por sus proyecciones frontal y horizontal?

§ 6. PROYECCIONES ORTOGONALES Y SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

El modelo de la posición de un punto en el sistema *V*, *H*, *W* (fig. 16) es análogo al modelo que se puede construir conociendo las coordenadas rectangulares [1] de este punto, es decir, las cifras que expresan sus distancias a tres planos perpendiculares entre sí, *planos de coordenadas*. Las rectas según las cuales se cortan los planos de coordenadas se llaman *ejes de coordenadas*. El punto de intersección de los ejes de coordenadas se llama *origen de coordenadas* y se designa con la letra *O* [2]. Para los ejes de coordenadas utilizaremos las denotaciones indicadas en la fig. 16.

Los planos de coordenadas forman en su intersección ocho ángulos triédricos dividiendo el espacio en ocho partes llamadas *octantes* [3]. En la fig. 16 está representado uno de los octantes. Se muestra la formación de segmentos que determinan las coordenadas de cierto punto *A*: del punto *A* se han trazado las perpendiculares a cada uno de los planos de coordenadas. La primera coordenada del punto *A* llamada *abscisa* de este punto [4] se expresará con una cifra obtenida de la comparación del segmento Aa'' (o del segmento *O1* en el eje *x*, igual a Aa'') con cierto segmento adoptado como unidad de escala. De la misma manera el segmento Aa' (o el *O2*, igual a éste, en el eje *y*) determinará la segunda coordenada del punto *A* llamada

---

[1] Llamadas de otra manera «coordenadas cartesianas». El sistema de coordenadas de Descartes puede ser rectangular y oblicuangular; aquí se examina el sistema rectangular. Descartes (1596—1650), filósofo y geómetra francés.

[2] Primera letra de la palabra latina «origo», origen.

[3] De la palabra latina «octo» que significa ocho.

[4] De la palabra latina «abscissa» que significa cortada, separada.

denada [1]; el segmento Aa (o el $O3$, igual a éste, en el eje z) determinará la tercera coordenada llamada *Z-coordenada*.

En la designación con letras de las coordenadas la abscisa se denota con la letra x, la ordenada, con la letra y, y la *Z-coordenada*, con la letra z.

El paralelepípedo construido en la fig. 16 se llama *paralelepípedo de coordenadas* del punto dado A. La construcción del punto por sus coordenadas dadas se reduce a la construcción de tres aristas del paralelepípedo de coordenadas, que componen una línea quebrada de tres eslabones (fig. 24). Se deben trazar sucesivamente los segmentos

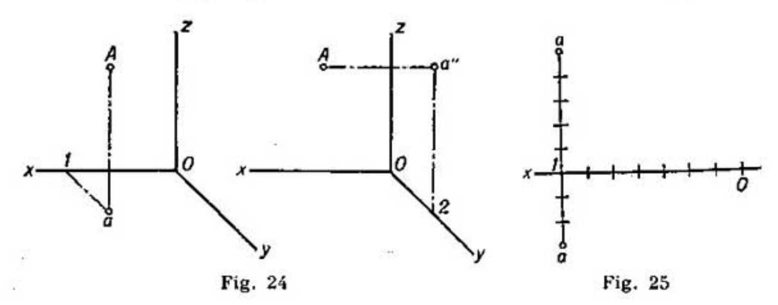


Fig. 24

Fig. 25

$O1$, $1a$ y aA o bien $O2$, $a''2$ y $a''A$, etc., es decir, el punto A se puede obtener por seis combinaciones, en cada una de las cuales deben figurar las tres coordenadas.

En la fig. 24, para mayor claridad de representación, se ha tomado la proyección conocida del curso de dibujo lineal de la escuela secundaria, llamada *de gabinete* [2]. En esta proyección los ejes x y z son perpendiculares entre sí y el eje y es la prolongación de la bisectriz del ángulo xOz. En la proyección de gabinete, los segmentos trazados por el eje y o paralelamente a éste se reducen el doble.

La fig. 16 muestra que la construcción de las proyecciones de un punto va acompañada de la construcción de los segmentos que determinan las coordenadas de este punto, si se toman los planos de proyección como planos de coordenadas. Cada proyección del punto A se determina por dos coordenadas de este punto; por ejemplo, la posición de la proyección a se determina por las coordenadas x e y.

Supongamos que sea dado el punto A (7, 3, 5); esta escritura significa que el punto A se determina por las coordenadas $x=7$,

---

[1] De la palabra latina «ordinata» que a su vez procede de la palabra «ordinatim ducta» que significa trazada consecutivamente.

[2] La proyección de gabinete se refiere a las oblicuángulas (véase más detalladamente en el § 75)

$y=3$, $z=5$. Si se conoce la escala para la construcción del dibujo, entonces (fig. 25), sobre el eje x se traza, a partir de cierto punto O, el segmento $O1$ igual a 7 unidades, y sobre la perpendicular a este eje, levantada desde el punto 1, se trazan los segmentos $a1=3$ unidades y $a'1=5$ unidades. Se obtienen las proyecciones a y a'. Para dicha construcción es suficiente tomar solamente el eje x.

Tomando el eje de proyección como eje de coordenadas se pueden hallar las coordenadas del punto por sus proyecciones dadas. Por ejemplo, en la fig. 18 el segmento $O1$ expresa la abscisa del punto A, el segmento $a1$, su ordenada, y el segmento $a'1$, su Z-coordenada.

Si se da solamente la abscisa, a esto le corresponde un plano paralelo al plano determinado por los ejes y y z. En efecto, tal plano es el lugar geométrico de los puntos cuyas abscisas son equivalentes a la magnitud dada (fig. 26, el plano P).

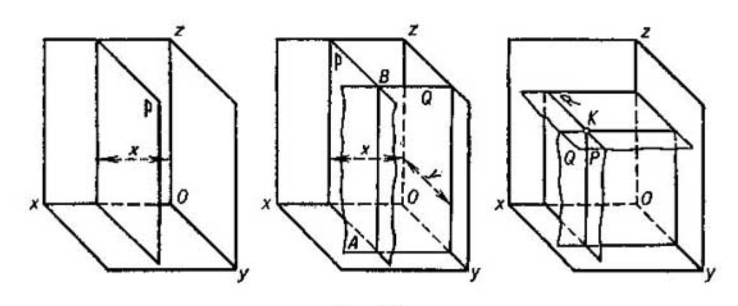


Fig. 26

Si se dan dos coordenadas, con esto se determina una recta paralela al eje de coordenadas correspondiente. Por ejemplo, teniendo dadas la abscisa y la ordenada obtenemos una recta paralela al eje z (en la fig. 26, la recta AB). Esta recta es la línea de intersección de dos planos P y Q, donde Q es el lugar geométrico de los puntos con iguales ordenadas. La recta AB sirve de lugar geométrico de los puntos con iguales abscisas e iguales ordenadas.

Si se dan las tres coordenadas, con esto se determina un punto. En la fig. 26 se muestra el punto K obtenido en la intersección de tres planos, de los cuales P es el lugar geométrico de los puntos por la abscisa dada, Q, por la ordenada dada, y R, por la Z-coordenada dada.

El punto puede encontrarse en cualquiera de los ocho octantes (la numeración de los octantes véase en la fig. 27). Por consiguiente, es necesario conocer no sólo la distancia del punto dado a uno u otro plano de coordenadas, sino también la dirección en la que esta dis-

tancia debe trazarse; para esto las coordenadas de los puntos se expresan con números relativos. Para la lectura de las coordenadas emplearemos el sistema de signos señalado en la fig. 27, es decir, emplearemos el sistema de coordenadas llamado «derecho». El sistema derecho se caracteriza por que el giro a 90° del rayo «positivo» Ox (fig. 27) en sentido del rayo «positivo» Oy tiene lugar en sentido contrario a las agujas del reloj (con la condición de que se mira al plano xOy desde arriba).

En el sistema llamado «izquierdo», el rayo «positivo» Ox está dirigido hacia la derecha del punto O.

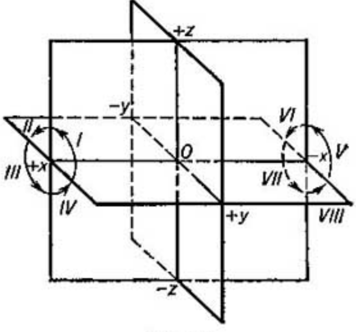


Fig. 27

Al representar los cuerpos, ordinariamente, como planos de coordenadas se toman no los planos de proyección, sino un sistema de tres planos algunos perpendiculares entre sí, enlazados directamente con el cuerpo dado, por ejemplo, las caras de un paralelepípedo rectangular, dos caras y el plano de simetría, etc. A tal sistema de coordenadas se le suele llamar «interior».

§ 7. LOS PUNTOS EN LOS CUADRANTES Y OCTANTES DEL ESPACIO

En el § 4 se dijo que los planos V y H forman cuatro ángulos diedros que dividen al espacio en cuatro regiones llamadas *cuadrantes*. En la fig. 28 se señala el orden adoptado de lectura de los cuadrantes. El eje de proyección divide a cada uno de los planos H y V en «semiplanos», designados convencionalmente con los signos H y

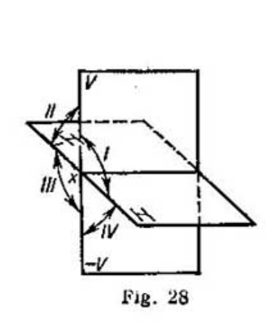


Fig. 28

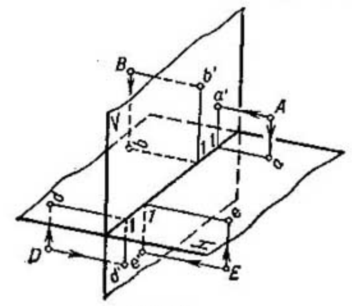


Fig 29

$-H$, V y $-V$. Si, por ejemplo, el punto se encuentra en el segundo cuadrante, su proyección horizontal se encontrará en el semiplano $-H$, y la frontal, en el V. En la exposición a continuación, como base para la construcción del dibujo de un punto en cualquiera de los cuatro cuadrantes, tomaremos el tipo de dibujo representado en la fig. 13 (vease la pag. 18).

El observador se supone siempre situado en el primer cuadrante (convencionalmente, a una distancia infinitamente grande de V

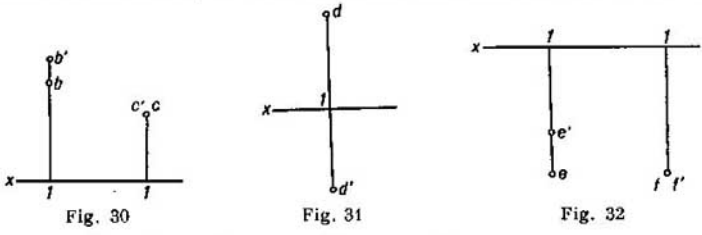


Fig. 30 Fig. 31 Fig. 32

y de H). Los planos de proyección se consideran opacos; por eso son vistos solamente los puntos situados en el primer cuadrante y en los semiplanos V y H.

En la fig. 13 se da el dibujo para el caso cuando el punto está situado en el primer cuadrante (véase la fig. 29). Si el punto equidista de V y H, entonces $a'1=a1$.

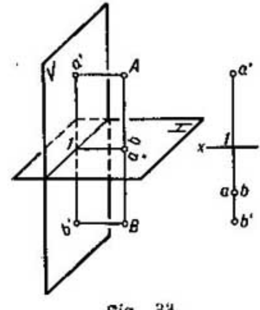


Fig. 33

En la fig. 30 se muestra el punto B situado en el segundo cuadrante, es decir, encima de $-H$ (del semiplano horizontal posterior) y detrás de V (del semiplano vertical superior) (fig. 29). El punto B se encuentra más cerca de V que de $-H$: en el dibujo $b1 < b'1$. En la misma figura se muestra el punto C equidistante de $-H$ y de V: las proyecciones c' y c se confunden.

En la fig. 31 se da el dibujo para el caso cuando el punto D está situado en el tercer cuadrante. La proyección horizontal se halla encima del eje de proyección, y la proyección frontal, debajo del eje de proyección. Puesto que $d1>d'1$, el punto D se encuentra más lejos de $-V$ (del semiplano vertical inferior) que de $-H$.

En la fig. 32 se dan el punto E y el punto F, situados en el cuarto cuadrante. El punto E se encuentra más cerca de H (del semiplano horizontal anterior) que de $-V$ (fig. 29): $e'1<e1$. El punto F equidista de $-V$ y de H: $f1=f'1$.

En la fig. 33, en el sistema V, H, están representados los puntos A y B dispuestos simétricamente respecto al plano H. En el dibujo (fig. 33, a la derecha) las proyecciones horizontales de estos puntos coinciden una con otra, mientras que las proyecciones frontales equidistan del eje de proyección: $a'1=b'1$.

En la práctica del dibujo lineal tiene lugar el empleo del primero y tercero cuadrantes del espacio. Más detalladamente véase en el § 41.

En la fig. 27 se mostró que los planos de coordenadas forman en su intersección ocho ángulos triédricos, dividiendo al espacio en ocho octantes. La numeración de los octantes se señala en la fig. 27. Como se ve de la fig. 28, los cuadrantes se numeran como los cuatro primeros (I—IV) octantes.

Empleando para la lectura de las coordenadas del punto el sistema de signos señalado en la fig. 27, obtendremos la siguiente tabla:

Octante	Signos de las coordenadas			Octante	Signos de las coordenadas		
	x	y	z		x	y	z
I	+	+	+	V	—	+	+
II	+	—	+	VI	—	—	+
III	+	—	—	VII	—	—	—
IV	+	+	—	VIII	—	+	—

Fig. 34

Por ejemplo, el punto (−20; +15; −18) se encuentra en el octavo octante. El abatimiento de los planos se realiza de acuerdo con la fig. 34, es decir, el plano W se hace girar en sentido contrario a las agujas del reloj, si se mira al plano H en dirección de $+z$ a O.

En la fig. 34 se dan también los dibujos de los puntos: A situado en el primer octante, y G que se encuentra en el séptimo octante; las proyecciones de un mismo punto no pueden superponerse una sobre la otra. Para los demás octantes dos o las tres (para el segundo y octavo octantes) proyecciones de un mismo punto pueden resultar superpuestas una sobre otra.

PREGUNTAS A LOS §§ 6 Y 7

1. ¿Qué significa coordenadas rectangulares cartesianas de un punto?
2. ¿En qué sucesión se escriben las coordenadas en la designación de un punto?
3. ¿Qué significa cuadrante del espacio?
4. ¿Qué significa octante?
5. ¿Qué signos tienen las coordenadas de un punto situado en el séptimo octante?
6. ¿En qué consiste la diferencia entre los sistemas de coordenadas «derecho» e «izquierdo»?
7. ¿En qué se diferencian entre sí los dibujos de dos puntos, uno de los cuales se encuentra en el primer cuadrante y el otro, en el tercero?

§ 8. FORMACION DE SISTEMAS AUXILIARES DE PLANOS DE PROYECCION

Hasta ahora nos hemos encontrado con dos sistemas de planos de proyección, V, H y V, H, W. En caso de necesidad se pueden formar otros sistemas más. Por ejemplo, introduciendo en el sistema V, H cierto plano $S \perp H$ (fig. 35), obtendremos además del sistema V, H con las proyecciones a' y a del punto A, el sistema S, H con las proyecciones a_s y a del mismo punto A.

¿Se formará, en este caso, también el sistema V, S? No: los planos V y S no son perpendiculares uno al otro.

El plano H entra en ambos sistemas V, H y S, H. Por eso, la proyección a del punto A (fig. 35) se refiere también al sistema S, H. Al proyectar el punto A sobre el plano S obtenemos el punto a_s a una distancia a_s2 del plano H, igual a Aa y a $a'1$.

En la fig. 36 los planos V, H y S se muestran abatidos sobre un plano, el plano del dibujo; el dibujo obtenido en este caso se muestra en la fig. 37. Además del eje V/H[1] se ha introducido el eje S/H; este último se elige de acuerdo a las condiciones derivadas de la tarea, como será expuesto más adelante. Del punto a se ha levantado una perpendicular al eje S/H, la línea de referencia sobre la cual se ha trazado el segmento a_s2 igual al segmento $a'1$, es decir, a la distancia en el espacio del punto A al plano H.

[1] Véase esta designación en la pág. 17.

En la fig. 38 se muestra un dibujo, en el que además del sistema V, H se da el sistema V, T, es decir, en el sistema V, H se ha introducido el plano auxiliar T perpendicular a V. Ahora ambos sistemas (V, H y V, T) contienen el plano V. Por esta razón se conserva la distancia del punto A precisamente al plano V y en el dibujo el segmento a_t2 deberá tomarse igual al segmento $a1$.

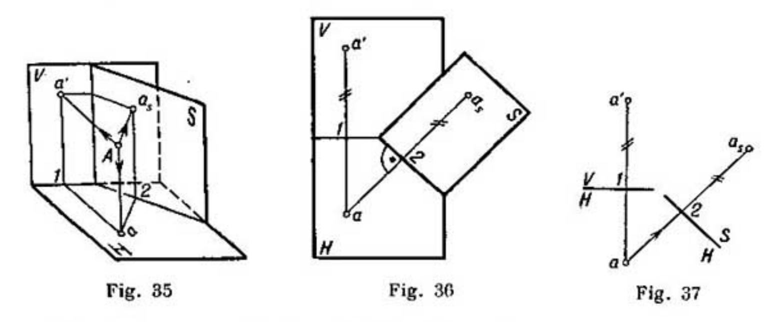


Fig. 35 Fig. 36 Fig. 37

Es evidente, que el plano W (fig. 15) puede ser interpretado como un plano auxiliar trazado perpendicularmente a V y a H. En este caso, además del sistema V, H se examina habitualmente el sistema V, W. Por analogía con la fig. 38, a la fig. 22 se le podría haber dado

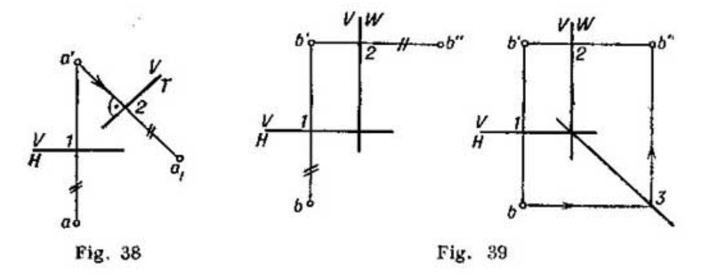


Fig. 38 Fig. 39

la forma representada en la fig. 39 a la izquierda, donde $b''2=b1$. Si se hace uso de la recta auxiliar de la fig. 17 (la bisectriz prolongada del ángulo xOz), la construcción adquiere la forma representada en la fig. 39 a la derecha. ¿Se puede proceder del mismo modo al construir, por ejemplo, la proyección a_s (fig. 37) o la a_t (fig. 38)? Sí; esto se muestra en la fig. 40. Pero aquí, claro está, no se obtiene el ángulo de 45° construido en la fig. 17. Como se ve de los dibujos en la fig. 40, es necesario trazar la bisectriz del ángulo formado por

los ejes V/H y S/H (fig. 40, a la izquierda) y los ejes V/H y V/T (en la misma figura, a la derecha).

Pero, como se dijo en la pág. 21, son preferibles las construcciones mostradas en la fig. 39, a la izquierda, y en las figs. 37 y 38.

Más adelante (§ 33), nos encontraremos con otros ejemplos más de introducción de planos auxiliares para la formación del sistema requerido de planos de proyección.

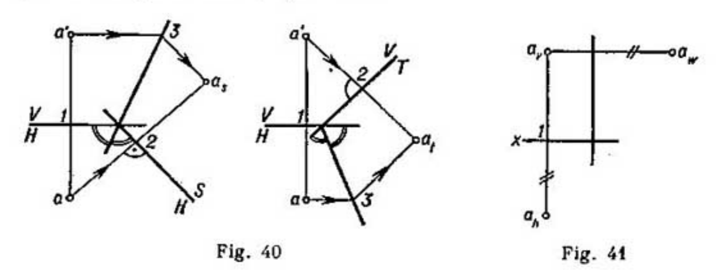


Fig. 40 Fig. 41

Para las proyecciones obtenidas en los planos auxiliares de proyección (por ejemplo, en el S o T) hemos empleado la designación con letras como subíndices, por ejemplo, a_s, a_t. En relación con esto sería conveniente emplear también para las proyecciones, por ejemplo, a, a', a'' las designaciones a_h, a_v, a_w (fig. 41). Pero, para las proyecciones sobre los planos H, V y W emplearemos principalmente las designaciones tradicionales, por ejemplo, para el punto A, a, a', a''.

§ 9. DIBUJOS SIN INDICACION DE LOS EJES DE PROYECCION

Más adelante, junto con los dibujos que contienen los ejes de proyección se emplearán los dibujos sin indicación de los ejes.

De la confrontación de los dibujos en la fig. 42 se desprende que en uno de ellos la posición de los planos V y H se ha determinado trazando su línea de intersección y que se ha determinado la distancia del punto A a estos planos. En el segundo dibujo de la fig. 42 la cuestión sobre las distancias del punto A a los planos V y H deja de ser actual, puesto que no existe el eje de proyección; se examina cierto punto A, dado por sus proyecciones, independientemente del lugar en que se encuentran los planos de proyección. En este caso, claro está, tanto mayor importancia adquiere la línea de referencia de las proyecciones, su dirección y trazado correcto.

¿Se puede, teniendo un dibujo sin indicación del eje de proyección, introducir este eje y con ello fijar la distancia del punto a los

planos V y H elegidos convencionalmente? Sí, se puede. Al introducir el eje, éste debe ser trazado obligatoriamente de tal manera que sea perpendicular a la línea de referencia, indiferentemente de a cuál punto precisamente de esta línea (si no se señala ninguna condición). En este caso, la posición de las proyecciones no varía. En efecto, trazando el eje de proyección elegimos cierta posición del ángulo diedro VH respecto al punto dado A (fig. 43). El traslado del eje en el dibujo hacia arriba o hacia abajo corresponde al traslado paralelo del ángulo diedro VH en el espacio a una nueva posición (en la fig. 43, la posición V_1H_1) en dirección del plano bisector del ángulo diedro [1], adyacente al ángulo VH.

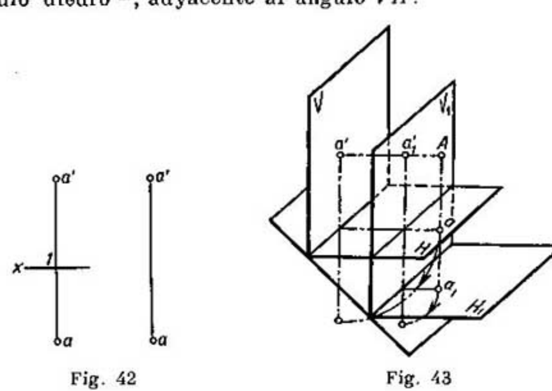


Fig. 42 Fig. 43

La introducción del eje de proyección (esto se hace corrientemente de acuerdo a alguna condición) fue mostrada en las figs. 37 y 38: los ejes S/H y V/T. Aquí los ejes eran necesarios para la construcción: a partir de ellos se contaban las dimensiones. En general, los ejes, si se examinan desde el punto de vista del significado inicial de la línea de intersección de los planos de proyección, ayudan a hacerse una idea del cuadro espacial por el dibujo.

Las bases de referencia de las dimensiones son una componente imprescindible de los dibujos técnicos; la elección de la posición de estas bases no es limitada y se determina partiendo de la necesidad y racionalidad.

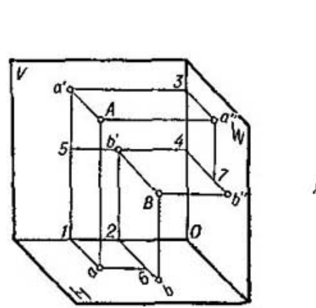
En la fig. 44a se muestra cómo se establece la diferencia entre las distancias de los puntos A y B a los planos de proyección H, V

---

[1] Se llama *plano bisector de un ángulo diedro* al plano que pasa por el arista del ángulo diedro y que lo divide por la mitad. De la palabra latina «bissektor», que corta por la mitad.

y *W*. El dibujo en la fig. 44b, a la izquierda, se representa con los ejes de proyección, el dibujo a la derecha, sin ellos.

En este ejemplo, la diferencia entre las distancias de los puntos al plano *H* se determina por el segmento *a'5* igual a *a'1—b'2* ó a *a"7*; al plano *V*, por el segmento *b6* igual a *b2—a1* ó a *b"7*; al plano *W*, por el segmento *b'5* igual a *a'3—b'4* ó a *a6*.



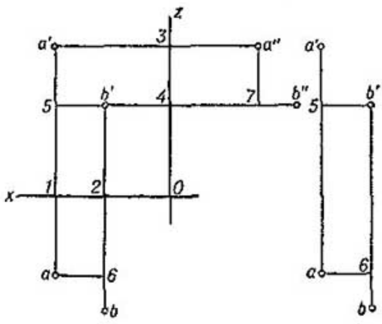


Fig. 44

PREGUNTAS A LOS §§ 8 Y 9

1. ¿Cómo se forman los sistemas de planos de proyección?
2. ¿A cuál condición debe corresponder el plano introducido en el sistema *V*, *H* como plano auxiliar de proyección?
3. ¿Cómo se construye la proyección de un punto, dado en el sistema *V*, *H*, sobre el plano *S* perpendicular al plano *H*?
4. ¿Se establecen o no las distancias de un punto a los planos de proyección si existe el eje de proyección?
5. ¿Cómo debe comprenderse el dibujo de un punto si no existe el eje de proyección?
6. ¿Qué fin tienen los ejes *S/H* y *V/T* en la fig. 40?
7. ¿Cómo se determinan en el dibujo en el sistema *V*, *H* las distancias de un punto a los planos *H* y *V*?

§ 10. PROYECCIÓN DEL SEGMENTO DE UNA LÍNEA RECTA

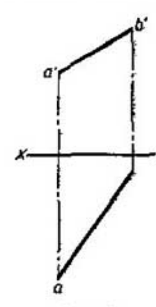
Supongamos que sean dadas las proyecciones frontal y horizontal de los puntos *A* y *B* (fig. 45). Trazando líneas rectas por las proyecciones homónimas de estos puntos, obtenemos las proyecciones del segmento *AB*, la frontal (*a'b'*) y la horizontal (*ab*) [1].

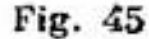
¿Se puede afirmar que tal dibujo (fig. 45) expresa precisamente el segmento de una línea recta? Sí; si nos imaginamos (fig. 46) que

[1] Véase el punto 5 del § 2.

por $a'b'$ y ab se han trazado los planos proyectantes (es decir, planos perpendiculares a V y a H respectivamente), en la intersección de estos planos se obtiene una recta y su segmento AB. En este caso, el punto dado por sus proyecciones sobre $a'b'$ y sobre ab, pertenece al segmento AB.

En la fig. 47 se da el dibujo de un segmento AB en el sistema V, H, W. Las proyecciones a'' y b'' se han construído de tal manera como fue mostrado en la fig. 18 para un solo punto A.




Fig. 45

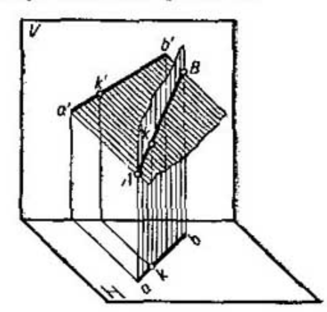


Fig. 46

Los puntos A y B están situados a diferentes distancias de cada uno de los planos V, H y W, es decir, la recta AB no es paralela a ninguno de ellos. Además, ninguna de las proyecciones de la recta es paralela al eje de proyección, ni tampoco perpendicular a éste. Tal recta se llama *recta de posición general*.

Cada una de las proyecciones es menor que el propio segmento: $a'b' < AB$, $ab < AB$, $a''b'' < AB$. Designando los ángulos formados por la recta con los planos H, V y W con α, β y γ respectivamente, obtenemos:

$$ab = AB \cos\alpha, \quad a'b' = AB \cos\beta, \quad a''b'' = AB \cos\gamma.$$

Si $ab = a'b' = a''b''$, entonces la recta forma con los planos de proyección ángulos iguales entre sí ($\approx 35°$) [1]; además, cada una de las proyecciones de la recta está situada bajo un ángulo de 45° a los respectivos ejes de proyección o a las líneas de referencia entre las proyecciones.

Es efecto, si (fig. 48) $a'b' = ab$ y $a'b' = a''a''$, la figura $a'b'ba$ es un trapecio isósceles y $b'1 = b2$, de donde $b''3 = a''3$, es decir, el án-

[1] Véase la deducción en el § 13.

gulo $a''b''3=45°$, y puesto que la figura $a'b'b''a''$ es un paralelogramo, cada uno de los ángulos $b'a'1$ y $ba2$ equivale a 45°.

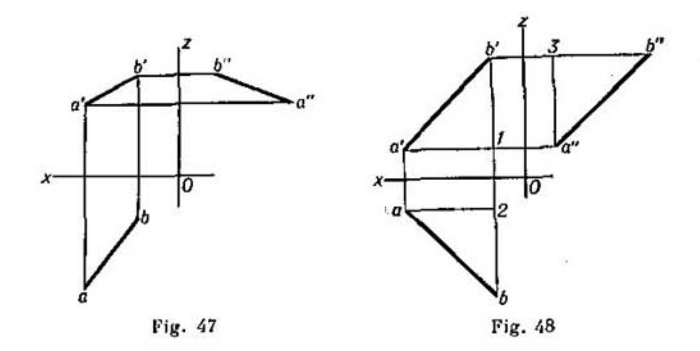


Fig. 47 Fig. 48

¿Cómo construir en un dibujo sin ejes de proyección, por ejemplo, la proyección en perfil del segmento de una recta? La construcción se muestra en la fig. 49, donde a la izquierda se da el dibujo original del segmento AB de una recta de posición general, en el centro se muestra el empleo de una recta auxiliar trazada bajo un ángulo de

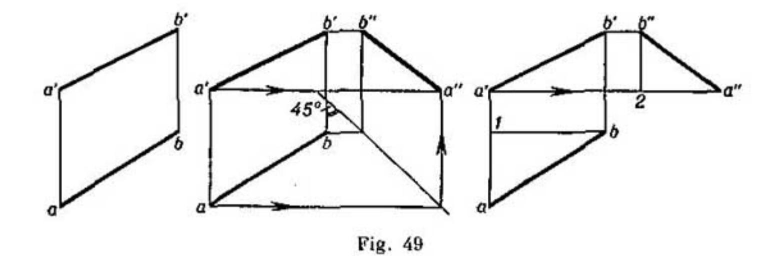


Fig. 49

45° a la dirección de la línea de referencia $b'b$, y a la derecha se da la construcción por la diferencia entre las distancias de los puntos A y B al plano V, o sea, por el segmento $a1$: eligiendo la posición de siquiera la proyección a'' (en la línea de referencia $a'a''$), trazamos $a''2=a1$ y levantando del punto 2 una perpendicular hasta su intersección con la línea de referencia de las proyecciones b' y b'' hallamos la posición de la proyección b''.

§ 11. POSICIONES PARTICULARES DE UNA LINEA RECTA RESPECTO DE LOS PLANOS DE PROYECCION

La línea recta puede ocupar respecto a los planos de proyección posiciones particulares. Examinémoslas según los dos criterios siguientes:

A. La recta es paralela a uno de los planos de proyección.

B. La recta es paralela a dos planos de proyección.

En el primer caso una de las proyecciones del segmento de la recta es igual al propio segmento. En el segundo caso dos proyecciones del segmento son equivalentes a éste[1].

A. La recta es paralela a uno de los planos de proyección

1. La recta es paralela al plano H (fig. 50). En este caso, la proyección frontal de la recta es paralela al eje de proyección y la proyección horizontal del segmento de esta recta es igual al propio segmento: $ab=AB$. Tal recta se llama *horizontal*.

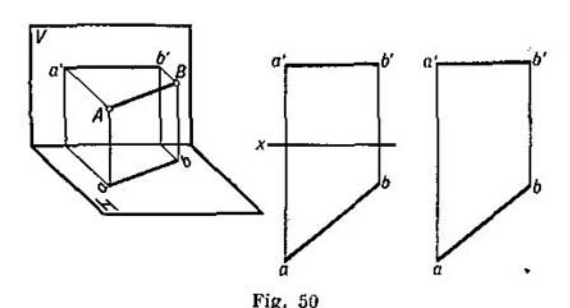


Fig. 50

Si, por ejemplo, la proyección $a'b'$ coincide con el eje de proyección, el segmento AB está situado en el plano H[2].

2. La recta es paralela al plano V (fig. 51). En este caso, su proyección horizontal es paralela al eje de proyección y la proyección frontal del segmento de esta recta es igual al propio segmento: $c'd'=CD$. Tal recta se llama *frontal*.

---

[1] Todo esto, claro está, teniendo en cuenta la escala del dibujo.

[2] En la fig. 50, a la derecha, se muestra un dibujo sin indicación del eje de proyección. Lo mismo se ha hecho en la fig. 51.

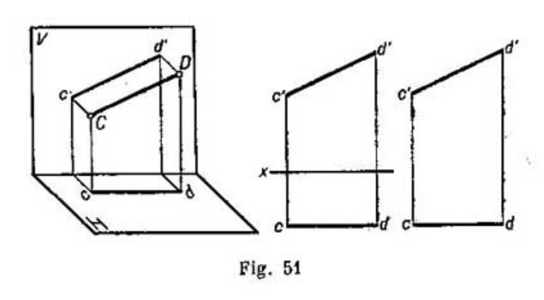


Fig. 51

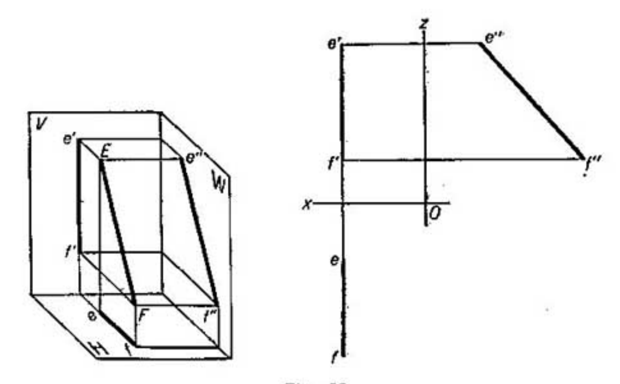


Fig. 52

Si, por ejemplo, la proyección *cd* coincide con el eje de proyección, esto corresponde a la posición del segmento CD en el propio plano V.

3. La recta es paralela al plano W (fig. 52). En este caso, las proyecciones horizontal y frontal de la recta se disponen en una misma perpendicular al eje de proyección Ox y la proyección de perfil de esta recta es igual al propio segmento: $e''f''=EF$. Tal recta se llama *de perfil.*

¿Se puede considerar, que en los dibujos semejantes a los señalados en las figs. 50 y 51, están representados segmentos precisamente de líneas rectas? Sí; la demostración es la misma que para la recta de posición general (fig. 46).

Si en el dibujo, en el sistema $V; H$, ambas proyecciones son perpendiculares al eje de proyección, entonces, los planos proyectantes trazados por ef y $e'f'$ se confunden y el original puede ser no sólo una línea recta, sino también cierta curva plana (fig. 53).

B. La recta es paralela a dos planos de proyección

1. La recta es paralela a los planos V y H (fig. 54), es decir, es perpendicular al plano W. La proyección sobre el plano W representa un punto.

2. La recta es paralela a los planos H y W (fig. 55), es decir, es perpendicular al plano V. La proyección sobre el plano W representa un segmento de esta recta, igual a cd.

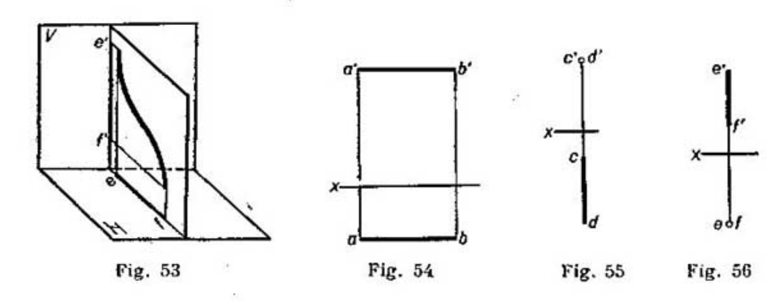


Fig. 53 Fig. 54 Fig. 55 Fig. 56

3. La recta es paralela a los planos V y W (fig. 56), es decir, es perpendicular al plano H. La proyección de esta recta sobre el plano W representa un segmento paralelo e igual a $e'f'$.

En la fig. 57 se da una representación demostrativa de las posiciones de las rectas examinadas[1].

Habitualmente, se construyen las proyecciones de los segmentos de una recta indicando los puntos extremos del segmento. Si por cualesquiera causas se representa cierta parte indefinida de una línea recta, entonces, prácticamente se representa también un segmento de esta recta, pero no se denotan los puntos extremos de este segmento. En este caso, se puede emplear la designación de cada proyección con una sola letra, refiriéndola a cualquier punto de la recta (fig. 58): «la recta que pasa por el punto A».

Prestemos atención en el dibujo representado en la fig. 59 a la derecha. Respecto de la recta representada en este dibujo, se puede decir solamente que ella pasa por el punto L y que es paralela al

1) Para estas rectas se usa el nombre de «rectas proyectantes».

plano H, pero en lo demás la posición de esta recta no queda definida. Daría claridad la proyección horizontal, es decir, la proyección sobre el plano respecto al cual la recta es paralela.

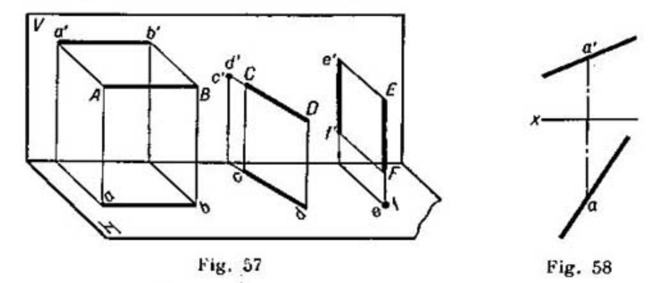


Fig. 57 Fig. 58

Si examinamos una recta dada por dos de sus puntos (por ejemplo, el segmento de una recta dado por sus extremos), entonces, se puede hallar exactamente la posición de esta recta, incluso en el caso en que no sea dada su proyección sobre el plano paralelo a esta recta.

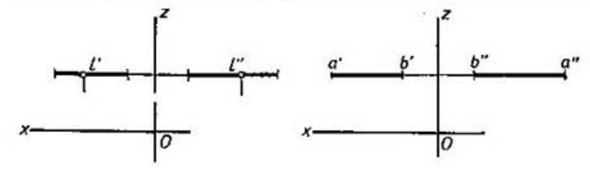


Fig. 59

Así, por ejemplo, si está dado el segmento AB de una recta (fig. 59, a la derecha), podemos establecer no solamente el paralelismo de esta recta con relación al plano H, sino también que el punto A de la recta dada se encuentra más lejos del plano V que el punto B.

§ 12. EL PUNTO SOBRE UNA RECTA. TRAZAS DE UNA RECTA

En la fig. 60 se da el dibujo de una recta de posición general que pasa por el punto A. Si es conocido que el punto B pertenece a esta recta y que la proyección horizontal del punto B se encuentra en el punto b, entonces, la proyección frontal b' se determina como se muestra en la fig. 60.

En la fig. 61 se muestra la construcción de un punto sobre una recta de perfil. Supongamos que sea dada la proyección c' de este pun-

to; hay que hallar su proyección horizontal. La construcción se ha realizado con ayuda de la proyección de perfil $a''b''$ del segmento AB tomado en la recta de perfil. La marcha de la construcción se indica con flechas. Primero se ha determinado la proyección c'' y por ésta la proyección buscada c.

Una de las propiedades de la proyección paralela es que *la relación entre los segmentos de una línea recta es igual a la relación entre sus proyecciones* (fig. 62): $\frac{AC}{CB} = \frac{a_pc_p}{c_pb_p}$, puesto que las rectas Aa_p, Cc_p y Bb_p son paralelas entre sí. Análogamente, la relación entre los segmentos sobre la proyección de una línea recta es igual a la relación

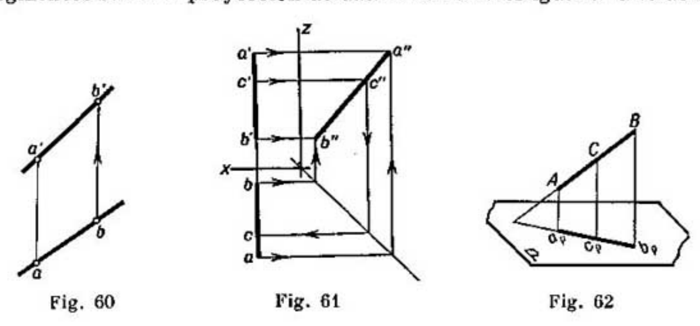


Fig. 60 Fig. 61 Fig. 62

de los segmentos sobre esta recta. Si un punto dividiera por la mitad al segmento de la recta, entonces, la proyección de este punto dividiría también por la mitad a la proyección del segmento, y viceversa.

De lo dicho se desprende que en la fig. 61, la división de las proyecciones $a'b'$ y ab por los puntos c' y c corresponde a la división del segmento AB en el espacio por el punto C en la misma relación. Esto puede ser utilizado para una construcción más simple del punto sobre la recta de perfil. Si (como en la fig. 61) sobre la proyección $a'b'$ se ha dado la proyección c' (fig. 63), entonces, evidentemente, hay que dividir ab en la misma relación en la que el punto c' divide a la proyección $a'b'$. Trazando desde el punto a una recta auxiliar, trazamos en ella $a1 = a'c'$ y $1-2 = c'b'$. Trazamos la recta $b2$ y paralelamente a ella, por el punto 1, otra recta hasta su intersección con ab en el punto c. Este punto representa la proyección horizontal buscada del punto C perteneciente al segmento AB.

En la fig. 64 se da un ejemplo de la división de un segmento de una línea recta en cierta relación dada.

El segmento CD se ha dividido en la relación de 2 : 5. A partir del punto c se ha trazado una recta auxiliar en la que se han señalado siete (2+5) segmentos de longitud arbitraria, pero iguales entre

sí. Trazando el segmento $d7$ y paralelamente a éste, por el punto 2, una recta, obtenemos el punto k, además, $ck : kd = 2 : 5$; a continuación hallamos k'. El punto K divide al segmento CD en la relación de 2: 5.

En la fig. 65 se muestran los puntos M y N en los cuales una recta, dada por el segmento AB, corta a los planos de proyección. Estos

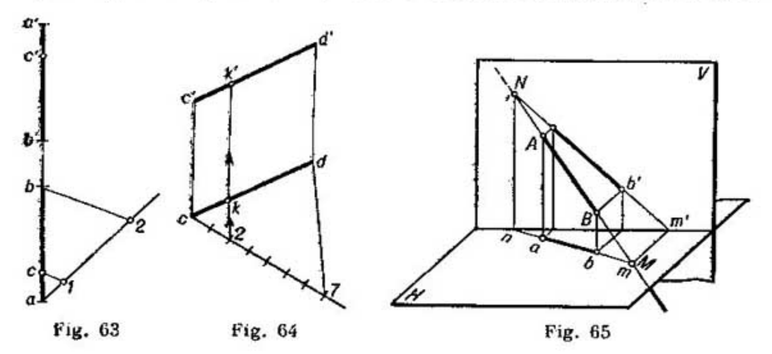


Fig. 63 Fig. 64 Fig. 65

puntos se llaman *trazas*: el punto M, *traza horizontal de la recta* y el punto N, su *traza frontal*.

La proyección horizontal de la traza horizontal (el punto m) se confunde con la traza, y la proyección frontal de esta traza (el punto m') se encuentra en el eje de proyección. La proyección frontal de la traza frontal (el punto n') coincide con el punto N, y la proyección horizontal (el punto n) se encuentra en el eje de proyección.

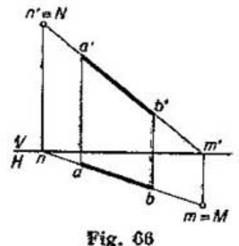


Fig. 66

Por consiguiente, para hallar la traza horizontal, hace falta (fig. 66) prolongar la proyección frontal $a'b'$ hasta su intersección con el eje V/H y trazar por el punto m' (la proyección frontal de la traza horizontal) una perpendicular al eje V/H hasta su intersección con la prolongación de la proyección horizontal ab. El punto m es la proyección horizontal de la traza horizontal; él coincide con la propia traza (≡es el signo de coincidencia).

Para hallar la traza frontal prolongamos la proyección horizontal ab hasta su intersección con el eje V/H; por el punto n (la proyección horizontal de la traza frontal) trazamos una perpendicular hasta su intersección con la prolongación de la proyección frontal

$a'b'$. El punto n' es la proyección frontal de la traza frontal: este punto se confunde con la traza.

Por la posición de los puntos M y N se puede juzgar sobre a cuáles cuadrantes del espacio está referida la recta dada. En la fig. 65 la recta AB pasa por los cuadrantes IV, I y II.

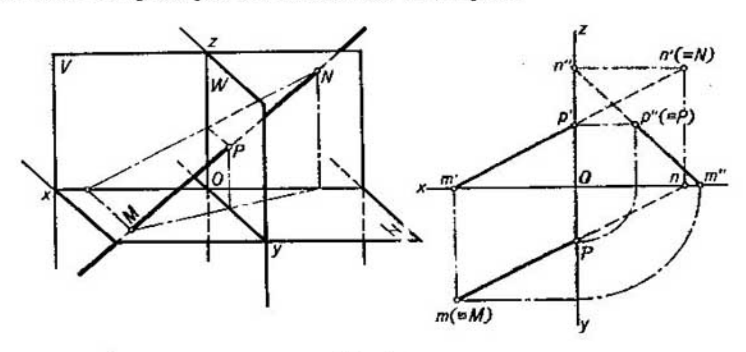


Fig. 67

La recta no tiene traza en el plano de proyección cuando es paralela a este plano.

En la fig. 67 la recta interseca no sólo los planos H y V, sino también el plano W. El punto P es la *traza de perfil* de la recta, es decir, la traza en el plano de proyección de perfil. Esta traza se confunde con su propia proyección sobre el plano W, y sus proyecciones frontal y horizontal se encuentran en los ejes z e y respectivamente.

En este caso la recta pasa tras el punto P a través del quinto octante e intersecando a continuación el plano V sale al sexto octante; del primer octante la recta sale al cuarto octante [1].

El dibujo correspondiente se da en la fig. 67 a la derecha. La recta se muestra en el primer octante (las proyecciones mp, $m'p'$, $m''p''$) y en el quinto octante (las proyecciones pn, $p'n'$, $p''n''$).

Si se toman los planos de proyección como planos de coordenadas, entonces, la coordenada de la traza horizontal de la recta es $z=0$, la de la traza frontal es $y=0$ y la de la traza de perfil es $x=0$.

La construcción de las trazas de la recta de perfil (fig. 68) puede ejecutarse de la manera siguiente (fig. 68, a la derecha):

---

[1] Convengamos en señalar en los dibujos con líneas llenas a las proyecciones que corresponden a la posición de segmento en el primer cuadrante o en el primer octante.

Construimos la proyección de perfil ($a''b''$), determinamos la posición de las proyecciones de perfil de la traza horizontal (m'') y de la traza frontal (n'') y a continuación hallamos la posición de las demás proyecciones de estas trazas (la sucesión de la construcción se muestra en el dibujo con flechas).

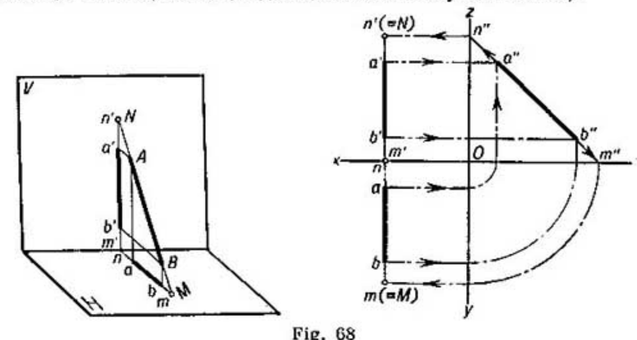


Fig. 68

PREGUNTAS A LOS §§ 10—12

1. ¿Cuál es la posición respecto a los planos de proyección en la que la recta se llama recta de posición general?

2. ¿Cómo se demuestra que el dibujo que contiene dos proyecciones enlazadas entre sí en forma de segmentos de recta, expresa precisamente un segmento de recta?

3. ¿Cómo se expresa la relación entre la proyección del segmento de una recta y el propio segmento?

4. ¿Cómo está situada la recta en el sistema *V*, *H*, *W*, si las tres proyecciones de un segmento de esta recta son iguales entre sí?

5. ¿Cómo construir la proyección de perfil del segmento de una recta de posición general por sus proyecciones frontal y horizontal dadas?

6. ¿Cómo ejecutar la construcción por la pregunta 5 en el dibujo sin ejes de proyección?

7. ¿Cuáles posiciones de una línea recta en el sistema *V*, *H*, *W* se consideran particulares?

8. ¿Cómo se dispone la proyección frontal del segmento de una recta, si su proyección horizontal es igual al propio segmento?

9. ¿Cómo se dispone la proyección horizontal del segmento de una recta, si su proyección frontal es igual al propio segmento?

10. ¿Cuál propiedad de la proyección paralela se refiere a la relación entre los segmentos de una recta?

11. ¿Cómo dividir en el dibujo el segmento de una recta en la relación dada?

12. ¿A qué se le llama traza de una recta en el plano de proyección?

13. ¿Cuál coordenada es igual a cero: a) para la traza frontal de una recta; b) para la traza horizontal de una recta?

14. ¿Dónde se dispone la proyección horizontal de la traza frontal de una recta?

15. ¿Dónde se dispone la proyección frontal de la traza horizontal de una recta?

16. ¿Puede haber el caso cuando una recta en el sistema *V*, *H*, *W* tenga sus trazas en cada uno de estos planos, coincidentes en un punto?

§ 13. CONSTRUCCIÓN DEL SEGMENTO DE UNA RECTA DE POSICIÓN GENERAL Y DE LOS ÁNGULOS DE INCLINACIÓN DE LA RECTA A LOS PLANOS DE PROYECCIÓN *V* Y *H* EN EL DIBUJO DE TAMAÑO NATURAL

Del examen de la parte superior de la fig. 69 se puede deducir que el segmento AB es la hipotenusa del triángulo rectángulo $AB1$, en el cual uno de los catetos es igual a la proyección del segmento ($A1=a_pb_p$) y el otro equivale a la diferencia entre las distancias de los extremos del segmento al plano de proyección P.

Si las coordenadas que definen las distancias de los extremos del segmento al plano de proyección tienen diferentes signos (dibujo inferior de la fig. 69), se debe tener en cuenta la diferencia algebraica:

$$B1=Bb_p-(-Aa_p)=Bb_p+Aa_p.$$

El ángulo formado por una recta con el plano de proyección se determina como el ángulo formado por esta recta con su proyección sobre este plano. Este ángulo entra en el mismo triángulo rectángulo que se construye para determinar la verdadera magnitud del segmento.

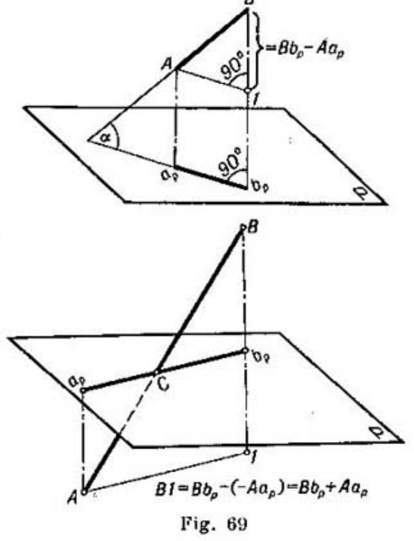


Fig. 69

Evidentemente, conociendo por el dibujo los catetos del triángulo, se puede construir este triángulo en cualquier parte del campo del dibujo. En la fig. 70 se muestra la construcción empleada por G. Monge: a partir del punto 1 se traza el segmento $a_1'1$, igual a la proyección ab, y se construye la hipotenusa $a_1'b'$ que expresa la magnitud verdadera del segmento AB. El ángulo con su vértice en el punto a_1' es igual al ángulo entre AB y el plano H.

En la fig. 71, a la izquierda, la longitud del segmento AB y el ángulo formado por la recta AB con el plano H han sido determinados del triángulo rectángulo construido sobre la proyección ab tomando como segundo cateto $b\overline{B}$ igual a $b'1$. $AB=a\overline{B}$.

En la fig. 71, a la derecha, la longitud del segmento y el ángulo formado por la recta AB con el plano V se han determinado del triángulo rectángulo construido sobre la proyección $a'b'$ ($a'\bar{A}=a2$). $AB=b'\bar{A}$.

¿Están limitados por algo los ángulos α y β para la recta de posición general? Sí, cada uno de estos ángulos puede ser solamente agudo. Pero, además, para la recta de posición general, $\alpha+\beta<90°$.

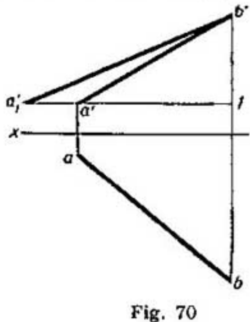


Fig. 70

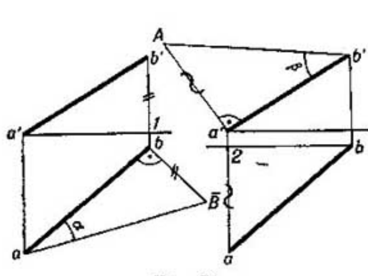


Fig. 71

En efecto, (fig. 72), en el triángulo rectángulo $n'm'm$ la suma de los ángulos $\gamma+\beta=90°$. Pero, en los triángulos $n'm'm$ y $n'nm$, siendo común la hipotenusa $n'm$, el cateto $n'm'$ es mayor que el cateto $n'n$ y, por consiguiente, $\delta>\alpha$. Sustituyendo en $\delta+\beta=90°$ δ por el ángulo α, obtenemos que $\alpha+\beta<90°$.

Examinemos (fig. 71) los triángulos rectángulos $ab\bar{B}$ y $b'a'\bar{A}$. En cada uno de estos triángulos la hipotenusa expresa la magnitud verdadera del segmento, y uno de los catetos es la proyección de este segmento. El otro cateto es igual a la diferencia entre las distancias de los extremos del segmento al correspondiente plano de proyección ($b\bar{B}=b'1=$a la diferencia entre las distancias al plano H, y $a'\bar{A}=a2=$a la diferencia entre las distancias al plano V). Además, en uno de estos triángulos se halla el ángulo formado por el segmento con el plano H (el ángulo α), y en el otro, el ángulo formado por el segmento con el plano V (el ángulo β).

En el caso dado, eran conocidos los catetos y determinabamos la hipotenusa y el ángulo. Pero puede surgir la siguiente posición: son conocidos la hipotenusa y el ángulo, hace falta determinar los catetos (es decir, *se conocen la magnitud verdadera del segmento y los ángulos formados por este segmento con los planos de proyección; hace falta construir las proyecciones de este segmento*).

Supongamos (fig. 73) que sea AB el segmento dado (en la fig. 71 corresponde a las hipotenusas $a\bar{B}$ y $b'\bar{A}$). Describamos con este segmento, como diámetro, una circunferencia. Tomando el punto A como vértice, construimos el ángulo α (es decir, el ángulo dado con el plano H) y el triángulo rectángulo $A1B$. De la comparación de este triángulo con el $ab\bar{B}$ (fig. 71) se desprende que el cateto $A1$

expresa la proyección horizontal del segmento AB, y el cateto $B1$, la diferencia entre las distancias de los extremos del segmento AB al plano H.

Construimos (fig. 73) también el triángulo rectángulo $A2B$ por la misma hipotenusa AB y el ángulo dado β con el plano de proyección V y lo comparamos

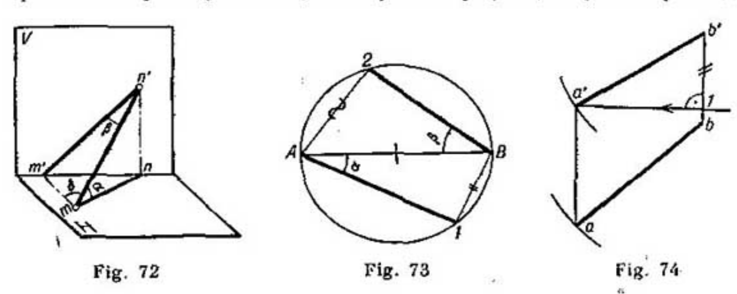


Fig. 72 Fig. 73 Fig. 74

con el triángulo $b'a'\bar{A}$ en la fig. 71. Es evidente, que el cateto $B2$ expresa la proyección frontal del segmento dado, y el cateto $A2$, la diferencia entre las distancias de los extremos del segmento al plano V.

Ahora construimos el dibujo (fig. 74). Supongamos que el segmento debe ser trazado por el punto B hacia la izquierda y hacia abajo. Llevando sobre la línea de referencia $b'b$, a partir del punto b', el segmento $b'1$ igual a $B1$ (véase la fig. 73), tracemos a continuación por el punto 1 una recta perpendicular a $b'b$. En la intersección de esta recta con el arco trazado desde el punto b' como centro y cuyo radio es igual a la proyección frontal, es decir, al segmento $B2$, obtenemos el punto a'. Para hallar la proyección horizontal a, se puede intersecar la línea de referencia con un arco descrito desde el punto a' y cuyo radio es igual a $A1$ (véase la fig. 73). En este caso, se deberá obtener que $a'a=b1=A2$.

En la fig. 74 se da solamente una posición del segmento. Pero, pueden existir otras siete posiciones más para el punto inicial B. Damos la posibilidad al lector de representar el segmento AB en estas posiciones.

En la fig. 75 se da un ejemplo de la determinación de la distancia desde el punto A hasta el punto O. Primero han sido construi-

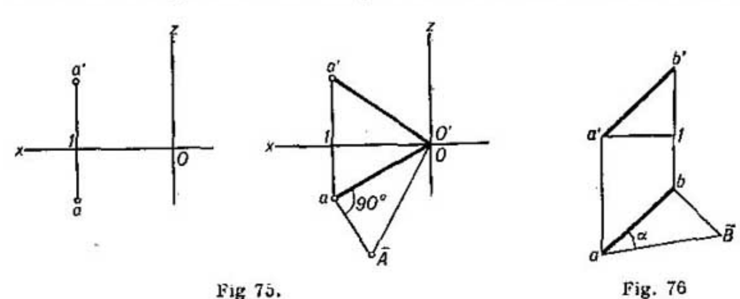


Fig 75. Fig. 76

das las proyecciones del segmento buscado: $a'o'$ y ao (el punto O está expresado por sus proyecciones o' y o). Luego se ha construido el triángulo $oa\bar{A}$, uno de cuyos catetos es la proyección oa, y el otro es el segmento $a\bar{A}=a'1$. La distancia buscada se determina por la hipotenusa $o\bar{A}$.

Ahora podemos determinar el ángulo formado por la recta, de igual inclinación a los planos H, V y W, con estos planos. Sobre este ángulo se habló en el § 10, y se indicó su magnitud ($\approx 35°$). Esta puede ser determinada si se examina, por ejemplo, la fig. 76: las proyecciones $a'b'$ y ab son iguales entre sí, y los ángulos $a'b'1$ y $a'ab$ equivalen cada uno a 45° (véase el § 10).

El ángulo buscado se ha determinado del triángulo rectángulo $ab\bar{B}$, en el que el cateto $b\bar{B}=b'1$. Si se toma $b'1$ igual a la unidad, entonces, $ab=a'b'=\sqrt{2}$ y el ángulo es $\alpha\approx 35°15'$. La misma magnitud tienen los ángulos formados por esta recta con los planos V y W.

Si se emplea lo dicho en el § 8, es decir, se complementa el sistema V, H con el sistema S, H, eligiendo el plano S perpendicular al H y paralelo al segmento de una recta dado en el dibujo, es evidente, que la proyección de este segmento sobre el plano S expresará su magnitud verdadera y el ángulo con el plano H.

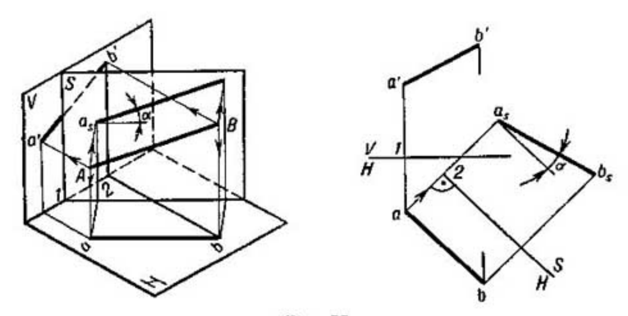


Fig. 77

Supongamos (fig. 77) que se exija determinar el tamaño natural del segmento AB y el ángulo formado por éste con el plano H. En el sistema V, H se ha introducido el plano $S\perp H$ de tal modo que $S\|AB$. Ha surgido un sistema auxiliar S, H. En este sistema $AB\|S$ (el eje $S/H\|ab$); la proyección a_sb_s expresa la magnitud verdadera del segmento AB.

§ 14. POSICIÓN RECÍPROCA DE DOS RECTAS

Rectas paralelas. Al número de propiedades de la proyección paralela se refiere la siguiente: *las proyecciones de dos rectas paralelas son paralelas entre sí*. Si (fig. 78) la recta AB es paralela a la recta CD, los planos proyectantes Q y R son paralelos entre sí y al intersecarse con el plano de proyección P se obtienen las proyecciones paralelas entre sí a_pb_p y c_pd_p.

Sin embargo, a pesar de que $a_pb_p \| c_pd_p$ (fig. 78), las rectas, para las cuales a_pb_p y c_pd_p son sus proyecciones, pueden ser no paralelas entre sí: por ejemplo, la recta AB no es paralela a la recta C_1D_1.

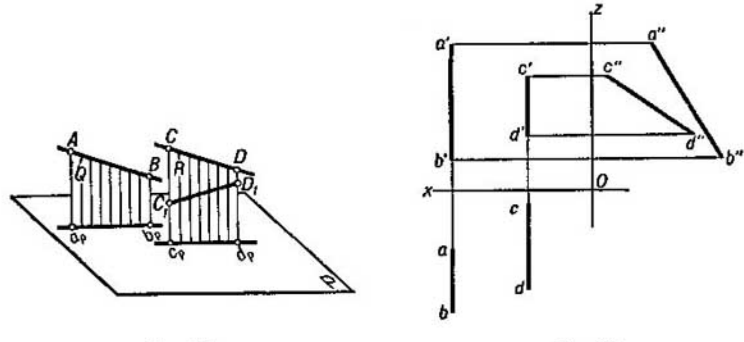


Fig. 78 Fig. 79

De la propiedad señalada de la proyección paralela se desprende que *las proyecciones horizontales de rectas paralelas son paralelas entre sí, las proyecciones frontales son paralelas entre sí y las proyecciones de perfil son paralelas entre sí*.

¿Es justa la conclusión inversa, es decir, serán paralelas dos rectas en el espacio, si en el dibujo sus proyecciones homónimas son dos a dos paralelas? Sí, si están dadas las proyecciones paralelas entre sí sobre cada uno de los planos de proyección, H, V y W. Pero, si están dadas las proyecciones paralelas entre sí de las rectas solamente sobre dos planos de proyección, entonces, el paralelismo de las rectas en el espacio se confirma siempre para las rectas de posición general y puede no confirmarse para las rectas paralelas a uno de los planos de proyección.

Un ejemplo se da en la fig. 79. A pesar de que las rectas de perfil AB y CD vienen dadas por las proyecciones ab, $a'b'$ y cd, $c'd'$ paralelas entre sí, las propias rectas no son paralelas, esto se ve de la disposición recíproca de sus proyecciones de perfil construidas por las proyecciones dadas.

Así pues, *la cuestión se resolvió con ayuda de las proyecciones de las rectas sobre el plano de proyección respecto al cual las rectas dadas son paralelas.*

En la fig. 80 está representado el caso cuando se puede establecer que las rectas de perfil AB y CD no son paralelas entre sí, sin recurrir a la construcción de la tercera proyección: basta prestar atención en la permutación de las designaciones.

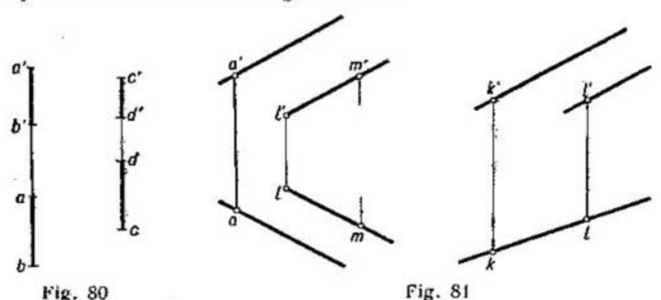


Fig. 80 Fig. 81

Si se exige trazar por el punto dado A una recta paralela a la recta dada LM, entonces (fig. 81, a la izquierda), la construcción se reduce al trazado por el punto a' de una recta paralela a $l'm'$, y por el punto a de otra recta paralela a lm.

En el caso representado en la fig. 81 a la derecha, las rectas paralelas están situadas en un plano proyectante común para ellas, perpendicular al plano H. Por esta razón, las proyecciones horizontales de estas rectas se encuentran sobre una misma recta.

Rectas que se cortan. *Si las rectas se cortan, sus proyecciones homónimas se cortan en un punto que es la proyección del punto de intersección de estas rectas.*

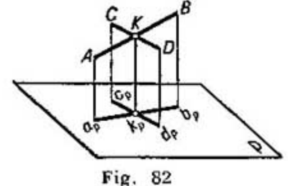


Fig. 82

En efecto (fig. 82), si el punto K perteneco a ambas rectas AB y CD, la proyección de este punto deberá ser el punto de intersección de las proyecciones de las rectas dadas.

La conclusión de que las rectas dadas en el dibujo se cortan, se puede hacer siempre con relación a las *rectas de posición general*, independientemente de si están dadas las proyecciones sobre tres o sobre dos planos de proyección. La condición necesaria y suficiente es que *los puntos de inersección de las proyecciones homónimas se encuentren en una misma perpendicular al correspondiente eje de proyección* (fig. 83) *o que, en el dibujo sin ejes de proyección* (fig. 84) *estos puntos*

se encuentren sobre la línea de referencia de dirección dada. Pero, si una de estas rectas es paralela a un plano de proyección cualquiera, y en el dibujo no vienen dadas las proyecciones sobre este plano, no se puede afirmar que estas rectas se cortan, aunque se cumpliera la condición indicada más arriba. Por ejemplo, en el caso dado en la fig. 85, las rectas AB y CD, de las cuales la CD es paralela al plano W, no se cortan; esto puede ser confirmado con la construcción

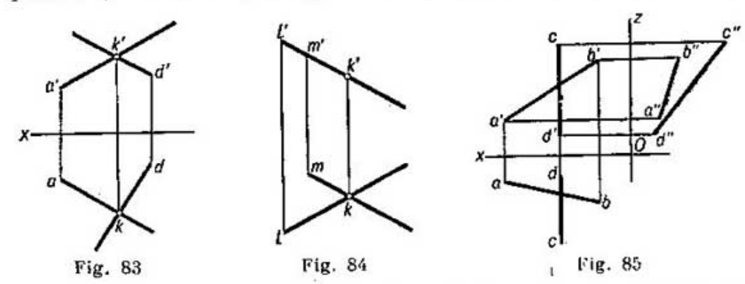


Fig. 83 Fig. 84 Fig. 85

de las proyecciones de perfil o aplicando las reglas de división de los segmentos en una relación dada.

Las rectas que se cortan representadas en la fig. 84 están contenidas en un plano proyectante común para éstas, perpendicular al plano V Por esta razón, las proyecciones frontales de estas rectas están situadas sobre una misma recta

Rectas que se cruzan. Las rectas que se cruzan, ni se cortan ni son paralelas. En la fig. 86 están representadas dos rectas que se cruzan de posición general: a pesar de que las proyecciones homónimas se cortan, sus puntos de intersección no pueden ser unidos con la línea de referencia, paralela a las líneas de referencia $l'l$

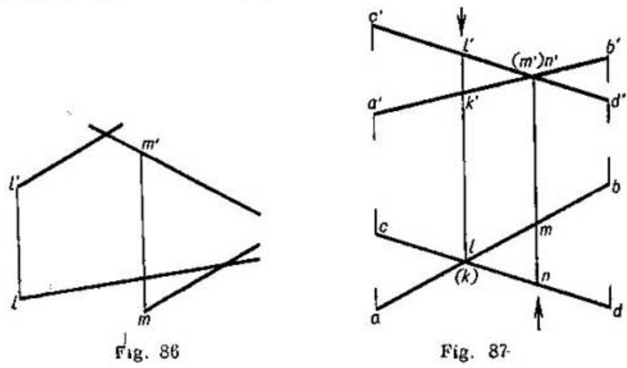


Fig. 86 Fig. 87

y $m'm$, es decir, estas rectas no se cortan. Las rectas representadas en la figs. 79, 80 y 85 son también rectas que se cruzan.

¿Cómo debe considerarse el punto de intersección de las proyecciones homónimas de las rectas que se cruzan? Este punto representa las proyecciones de dos puntos, uno de los cuales pertenece a una de las rectas que se cruzan, y el otro, a la otra recta. Por ejemplo, en la fig. 87 el punto con las proyecciones k' y k pertenece a la recta AB, y el punto con las proyecciones l' y l pertenece a la recta CD. Estos puntos equidistan del plano V, pero sus distancias hasta el plano H son diferentes: el punto con las proyecciones l' y l se encuentra más alejado del plano H que el punto con las proyecciones k' y k (véase la fig. 88).

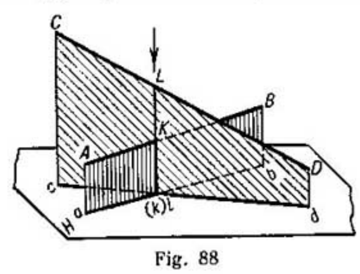


Fig. 88

Los puntos con las proyecciones m', m y n', n equidistan del plano H, pero se encuentran a distintas distancias del plano V.

El punto con las proyecciones l' y l, perteneciente a la recta CD, tapa al punto con las proyecciones k' y k de la recta AB respecto al plano H; la dirección correspondiente de la vista está indicada con una flecha al lado de la proyección l'. Respecto al plano V, el punto con las proyecciones n' y n de la recta CD tapa al punto con las proyecciones m' y m de la recta AB; la dirección de la vista está indicada con una flecha al lado de la proyección n.

Las designaciones de las proyecciones de los puntos «tapados» se dan entre paréntesis[1].

§ 15. SOBRE LAS PROYECCIONES DE ÁNGULOS PLANOS

1. *Si el plano, en el que está situado cierto ángulo, es perpendicular al plano de proyección, este ángulo se proyecta sobre este plano de proyección en forma de una recta.*

2. *Si el plano de un ángulo recto no es perpendicular al plano de proyección y por lo menos uno de sus lados es paralelo a este plano, el ángulo recto se proyecta sobre él en forma de ángulo recto.*

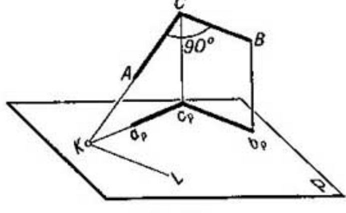


Fig. 89

[1] A los puntos pertenecientes a rectas que se cruzan y situados en una misma recta proyectante se les suele llamar puntos «concurrentes».

Supongamos que el lado CB del ángulo recto ACB (fig. 89) es paralelo al plano de proyección. En tal caso, la recta CB es paralela a $c_p b_p$. Sea que el segundo lado (AC) del ángulo recto corta a su proyección $a_p c_p$ en el punto K. Trazamos en el plano de proyección por el punto K una recta paralela a $c_p b_p$. La recta KL también es paralela a CB, y el ángulo CKL se obtiene recto. Por el teorema de las tres perpendiculares, el ángulo $c_p KL$ también es recto[1]. Por tanto, también es recto el ángulo $a_p c_p b_p$.

A este teorema sobre la proyección de un ángulo recto le corresponden dos inversos (puntos 3 y 4).

3. *Si la proyección de un ángulo plano representa un ángulo recto, el ángulo proyectado será recto solamente con la condición de que por lo menos uno de sus lados sea paralelo al plano de proyección.*

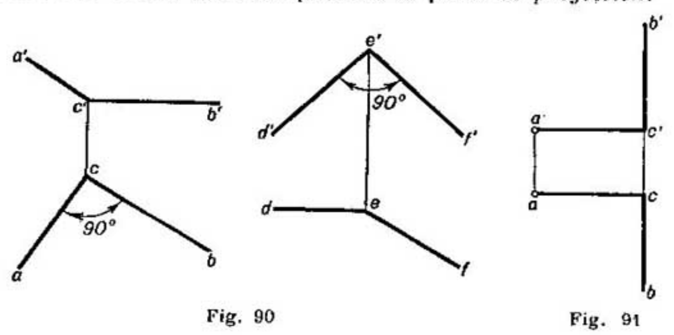


Fig. 90 Fig. 91

4. *Si la proyección de cierto ángulo, uno de cuyos lados es paralelo al plano de proyección, representa un ángulo recto, entonces, el ángulo proyectado también es recto.*

Basándose en lo expuesto se puede establecer que los ángulos representados en la fig. 90, en el espacio son rectos.

¿En qué caso las proyecciones de un ángulo recto sobre dos planos de proyección representan ángulos rectos? Esto sucede cuando uno de los lados del ángulo recto es perpendicular al tercer plano de proyección (en este caso, el otro lado es paralelo a este plano). Un ejemplo de este caso está representado en la fig. 91: el lado AC es perpendicular a W y el lado BC es paralelo a este plano.

Empleando los conocimientos sobre la proyección de un ángulo recto, sobre la adición del sistema S, H al sistema V, H (§ 8) y sobre la disposición de las proyecciones de una recta paralela a uno de los planos de proyección (§ 11),

---

[1] De acuerdo con el teorema directo de las tres perpendiculares: si $KL \perp c_p K$, entonces, $KL \perp CK$. De acuerdo con el teorema inverso: si $KL \perp CK$, entonces, $KL \perp c_p K$.

podemos cumplir las siguientes construcciones: trazar por cierto punto A una recta de modo que corte a la recta dada bajo un ángulo de 90°. La resolución se muestra en la fig. 92, donde, a la izquierda, se da la posición inicial, en el centro se muestra la formación de un sistema más S, H, además del sistema V, H, con la particularidad de que $S \parallel BC$, y a la derecha se ha cumplido la construcción de la recta $AK \perp BC$.

Por ser el plano $S \parallel BC$, lo que se asegura trazando el eje S/H paralelamente a bc, el ángulo recto AKB (o el AKC) se proyecta sobre el plano S en forma del ángulo recto $a_s k_s b_s$. Una vez construidas las proyecciones del punto A y de la recta BC sobre el plano S, trazamos $a_s k_s \perp b_s c_s$, y a continuación obtenemos las proyecciones k y k' y las proyecciones ak y $a'k'$ (la marcha de la construcción está indicada con flechas).

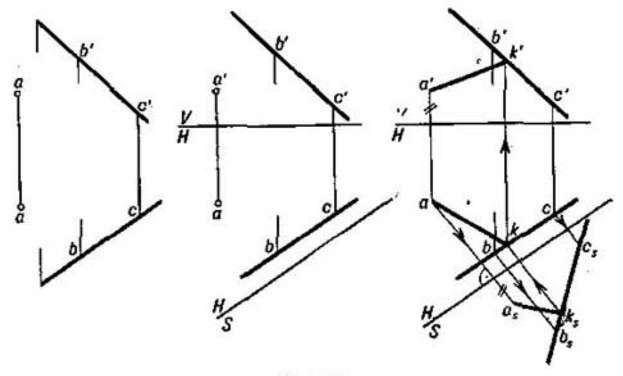


Fig. 92

¿Se puede considerar que, una vez construida la perpendicular AK a la recta BC, hemos determinado la distancia de A a BC? No, sólo hemos construido las proyecciones del segmento AK; ninguna de ellas determina la magnitud de la distancia. Si hay que determinar la magnitud del segmento AK, es decir, la distancia de A a BC, se debe continuar la construcción, empleando, por ejemplo, el procedimiento expuesto en el § 13.

5. *Si el plano de un ángulo obtuso o agudo no es perpendicular al plano de proyección y por lo menos uno de los lados del ángulo es paralelo al plano de proyección, entonces, la proyección de un ángulo obtuso sobre este plano representa un ángulo obtuso; y la proyección de un ángulo agudo, un ángulo agudo.*

Supongamos que la recta CB (fig. 93) sea paralela al plano de proyección. Examinemos el ángulo obtuso KCB o el ángulo agudo MCB y tracemos en el plano de este ángulo una recta $CL \perp CB$. Por ser el ángulo LCB recto, su proyección, el ángulo $Lc_p b_p$, representa un ángulo recto. Este ángulo está comprendido dentro del ángulo $Kc_p b_p$

y comprende a su vez al ángulo Mc_pb_p, por tanto, el ángulo Kc_pb_p es obtuso y el Mc_pb_p es agudo.

Así pues, la proyección de un ángulo representa un ángulo del mismo nombre (recto, obtuso o agudo) que el propio ángulo, si por lo menos uno de los lados del ángulo es paralelo al plano de proyección.

En general, la proyección de cualquier ángulo, puede representar un ángulo recto, obtuso o agudo, según la posición del ángulo respecto al plano de proyección.

6. *Si ambos lados de un ángulo cualquiera son paralelos al plano de proyección, su proyección es de igual magnitud que el ángulo proyectado.*

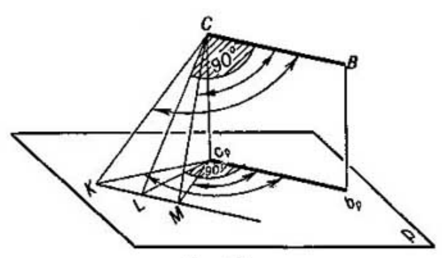


Fig. 93

Esto se desprende de la igualdad de los ángulos con lados paralelos y del mismo sentido.

Por eso, por ejemplo, el ángulo formado por la recta AB (fig. 50, pág. 35) con el plano V es fácil de determinar: es el ángulo entre la proyección ab y el eje x; de la misma manera el ángulo formado por la recta CD con el plano H (fig. 51) se determinará como el ángulo formado por la proyección $c'd'$ con el eje x, y el ángulo entre EF (fig. 52) y el plano V, como el ángulo formado por la proyección $e''f''$ con el eje z.

Para el ángulo recto, la igualdad de su proyección al propio ángulo tiene lugar en el caso en que sólo uno de los lados del ángulo recto es paralelo al plano de proyección.

Pero, para el ángulo agudo u obtuso, uno de cuyos lados es paralelo al plano de proyección, la proyección del ángulo no puede ser igual al ángulo proyectado. En este caso, la proyección de un ángulo *agudo* es menor que el ángulo proyectado, y la proyección de un ángulo *obtuso* es mayor que el ángulo proyectado.

Supongamos (fig. 94) que el ángulo A_1BC sea agudo y que su lado CB sea paralelo al plano P; $c_pb_p \| CB$. El plano S, trazado por el punto C perpendicularmente a CB, es perpendicular al plano P e interseca

a este último según la recta S_p, que pasa por el punto c_p y es perpendicular a c_pb_p. Si se traza por el punto B diferentes rectas bajo un mismo ángulo agudo a la recta CB, todas estas rectas intersecarán al plano S en puntos cuyas proyecciones se situarán sobre la recta S_p. Supongamos que las rectas AB y A_1B formen con la recta CB ángulos iguales entre sí: $\angle ABC = \angle A_1BC$. Si en este caso AB es paralelo al plano P, entonces, $\angle a_pb_pc_p = \angle ABC$. Si el lado A_1B no es paralelo al plano P, la proyección del punto A_1 se encontrará en la recta S_p más cerca del punto c_p que la proyección del punto A. Por consiguiente, la proyección del ángulo A_1BC representa un ángulo *menor* que el $a_pb_pc_p$, o sea, $\angle a_{1p}b_pc_p < \angle A_1BC$.

7. *Si los lados de un ángulo son paralelos al plano de proyección o están inclinados a una misma magnitud respecto a este plano, la división de la proyección de este ángulo sobre dicho plano por la mitad corresponde a la división por la mitad del propio ángulo en el espacio.*

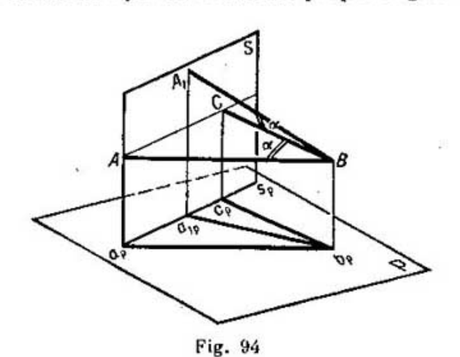


Fig. 94

8. *La división de un ángulo en el espacio por la mitad corresponde a la división de su proyección por la mitad sólo con la condición de que los lados del ángulo forman con el plano de proyección ángulos iguales.*

9. *Si los lados de un ángulo están inclinados a una misma magnitud respecto al plano de proyección, la proyección de este ángulo no puede ser igual al ángulo proyectado.*

Esto (fig. 95) se puede establecer mediante el abatimiento del ángulo MKN sobre el plano P, haciéndolo girar alrededor de la recta MN. En este caso, el ángulo Mk_pN se encontrará dentro del ángulo MK_1N, y los vértices K_1 y k_p estarán situados en la perpendicular común a MN.

10. *Las proyecciones de los ángulos agudo y obtuso pueden ser iguales al ángulo proyectado no solamente en el caso de paralelismo de los lados del ángulo al plano de proyección.*

En la fig. 96 se ve que todos los ángulos, por ejemplo, el ángulo agudo MKN y el obtuso MKN_1, cuyos lados están situados respectivamente en los planos proyectantes P y Q, tienen como proyección

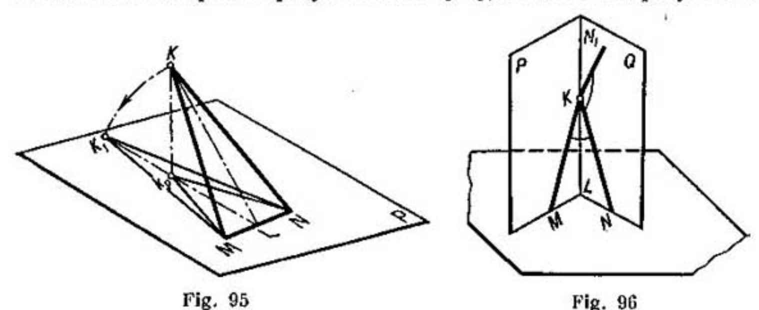


Fig. 95 Fig. 96

un ángulo igual al MLN, con la particularidad de que estos ángulos pueden adquirir los valores entre 0° y 180°. Evidentemente, entre estos ángulos puede hallarse un ángulo igual a su proyección.

Un ejemplo de la construcción de tal ángulo se da en el § 38.

PREGUNTAS A LOS §§ 13—15

1. ¿Cómo construir en el dibujo los triángulos rectángulos para determinar la longitud del segmento de una recta de posición general y los ángulos formados por ésta con los planos de proyección V y H?

2. ¿A qué condiciones deben corresponder los ángulos formados por una recta de posición general con los planos de proyección V y H?

3. ¿Cuál propiedad de la proyección paralela se refiere a las rectas paralelas?

4. ¿Se puede determinar por el dibujo de dos rectas de perfil en el sistema V, H, si son estas rectas paralelas entre sí?

5. ¿Cómo se representan en el sistema V, H dos rectas que se cortan?

6. ¿Cómo debe interpretarse el punto de intersección de las proyecciones de dos rectas que se cruzan?

7. ¿En qué caso el ángulo recto se proyecta en forma de ángulo recto?

8. ¿En qué caso la proyección de un ángulo obtuso o agudo es obligatoriamente un ángulo del mismo nombre (obtuso o agudo)?

9. ¿Puede ser la proyección de un ángulo agudo u obtuso, uno de cuyos lados es paralelo al plano de proyección, igual al propio ángulo en el espacio?

10. ¿En qué caso la división de la proyección de un ángulo por la mitad corresponde a la misma división del propio ángulo en el espacio?

11. ¿Puede ser la proyección de un ángulo sobre cierto plano de proyección, igual al ángulo proyectado cuyos lados forman con este plano ángulos iguales?

12. ¿Puede ser un ángulo agudo u obtuso, cuyos lados no son paralelos al plano de proyección, igual a su proyección sobre este plano?

III

CAPÍTULO

EL PLANO

§ 16. DIFERENTES MÉTODOS DE REPRESENTACIÓN DE UN PLANO EN EL DIBUJO

La posición de un plano en el espacio queda determinada:
a) por tres puntos no alineados;
b) por una recta y un punto exterior a esta recta;
c) por dos rectas que se cortan;
d) por dos rectas paralelas.
En concordancia con esto, en el dibujo el plano puede estar dado:

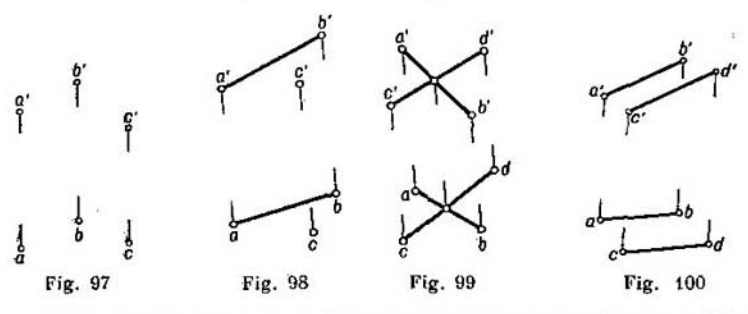


Fig. 97 Fig. 98 Fig. 99 Fig. 100

a) por las proyecciones de tres puntos no alineados (fig. 97);
b) por las proyecciones de una recta y un punto exterior a esta recta (fig. 98);
c) por las proyecciones de dos rectas que se cortan (fig. 99);
d) por las proyecciones de dos rectas paralelas (fig. 100).

Cada una de las representaciones expuestas en las figs. 97—100 puede ser transformada en otra de ellas. Por ejemplo, trazando por

los puntos A y B (fig. 97) una recta, obtendremos la representación del plano dada en la fig. 98; de ella podemos pasar a la fig. 100, si por el punto C trazamos una recta paralela a la recta AB. El plano puede ser representado en el dibujo por las proyecciones de cualquier figura plana (triángulo, cuadrado, círculo, etc.). Supongamos que cierto plano P viene determinado por los puntos A, B y C (fig. 101). Trazando líneas rectas por las proyecciones homónimas de estos puntos, obtendremos las proyecciones del triángulo ABC. El punto D, tomado sobre la recta AB, pertenece al mismo tiempo al plano P; trazando una recta por el punto D y otro punto perteneciente al plano P (por ejemplo, por el punto C), obtenemos una recta más en el plano P.

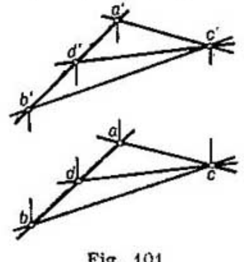


Fig. 101

Análogamente, pueden ser construidas las rectas y, por tanto, los puntos pertenecientes al plano dado por cualquier de los métodos expuestos.

Más adelante veremos que *el plano perpendicular al plano de proyección, puede ser dado por la recta según la cual estos planos se intersecan.*

§ 17. TRAZAS DE UN PLANO

El plano puede ser representado con mayor claridad con ayuda de las rectas según las cuales este plano interseca a los planos de proyección. En la fig. 102 se da un ejemplo de la construcción de tales rectas para el caso en que cierto plano Q viene dado por dos rectas que se cortan AB y CB.

Para construir la recta según la cual el plano Q interseca al plano H, basta construir dos puntos pertenecientes al mismo tiempo a los planos Q y H.

Como tales puntos sirven las trazas de las rectas AB y CD en el plano H, es decir, los puntos de intersección de estas rectas con el plano H. Una vez construidas las proyecciones de estas trazas, trazando una recta por los puntos m_1 y m_2, obtendremos la proyección horizontal de la línea de intersección de los planos Q y H.

La línea de intersección de los planos Q y V queda determinada por las trazas frontales de las rectas AB y CD.

Las rectas, según las cuales cierto plano interseca a los planos de proyección, se llaman trazas de este plano en los planos de proyección, o, abreviadamente, *trazas del plano.*

En la fig. 103 viene representado un plano P que interseca al plano horizontal de proyección según la recta designada por P_h y al plano frontal, según la recta P_v. La recta P_h se llama traza horizontal del plano, y la recta P_v, traza frontal del plano.

Si un plano interseca al eje de proyección, en este eje se obtiene el punto de intersección de las trazas del plano[1]. Así, por ejemplo, en la fig. 103 las trazas P_v y P_h se intersecan sobre el eje x en el punto designado con P_x.

La traza de un plano en el plano de proyección se confunde con su proyección sobre este plano. La traza P_h (fig. 103) se confunde con su proyección horizontal; la proyección frontal de esta traza

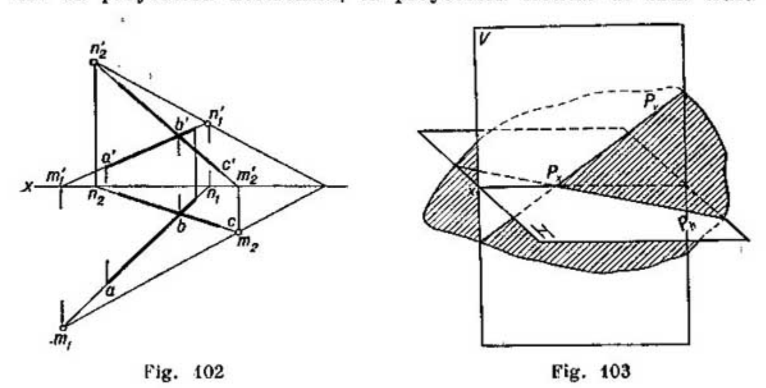


Fig. 102

Fig. 103

está situada en el eje de proyección. La traza P_v se confunde con su proyección frontal; la proyección horizontal de esta traza está situada en el eje de proyección.

En el dibujo, el plano puede ser dado por las proyecciones de sus trazas. Podemos limitarnos a designar solamente las propias trazas (fig. 104). Tal dibujo es claro y cómodo al ejecutar ciertas construcciones.

Al construir las trazas de un plano, el punto de su intersección puede ser utilizado para verificar la construcción: ambas trazas deben intersecarse en un punto sobre el eje de proyección (véase la fig. 102).

El ángulo entre las trazas en el dibujo no es igual al ángulo formado por las trazas del plano en el espacio. En efecto, en la intersección de las trazas se encuentra el vértice de un ángulo triédrico, dos de cuyas caras coinciden con los planos de proyección (fig. 103). Pero, la suma de los ángulos planos de un ángulo triédrico es mayor que el tercer ángulo plano. Por esta razón, el ángulo formado por las trazas P_v y P_h en el dibujo (fig. 104), siempre es mayor que el ángulo entre estas trazas en el espacio.

Si se examina un plano en el sistema V, H, W, entonces, en el caso general, el plano intersecará cada uno de los ejes de proyección

[1] A este punto se le suele llamar «punto de concurrencia de las trazas»

(fig. 105: el plano P intersecará a los ejes x, y y z). A tal plano se le llama *plano de posición general*. La traza P_w se llama *traza de perfil del plano*.

Puesto que los puntos P_x, P_y y P_z están situados sobre los ejes x, y y z respectivamente, para construir el dibujo del plano en el sistema V, H, W es suficiente tener dados los segmentos OP_x, OP_y y OP_z, es decir, conocer las coordenadas de los puntos P_x, P_y y P_z

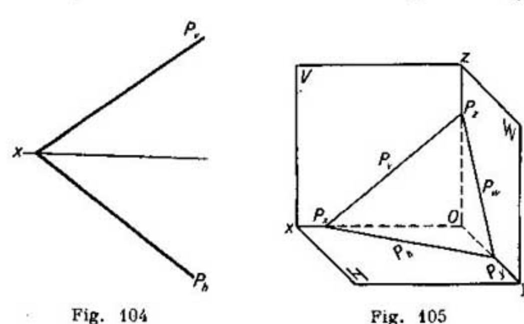


Fig. 104 Fig. 105

en el sistema de ejes x, y, z. El problema se reduce solamente a una coordenada para cada uno de estos puntos, ya que las otras dos coordenadas son iguales a cero. Por ejemplo, para la construcción del punto P_z basta conocer su Z-coordenada: la abscisa y la ordenada de este punto son iguales a cero.

§ 18. LA RECTA Y EL PUNTO EN EL PLANO. RECTAS DE POSICION PARTICULAR

¿Cómo construir en el dibujo una línea recta situada en un plano dado? Esta construcción se basa en dos hipótesis conocidas de la Geometría.

1) *Una recta pertenece a un plano, si pasa por dos puntos pertenecientes a este plano.*

2) *Una recta pertenece a un plano, si pasa por un punto perteneciente a este plano, y es paralela a una recta situada en este plano o paralela a él.*

Supongamos que el plano Q_1 (fig. 106) esté determinado por dos rectas que se cortan AB y CB, y el plano Q_2, por dos rectas paralelas DE y FG. De acuerdo con la primera hipótesis, la recta que corta a dos rectas que determinan a un plano, se encuentra sobre este plano.

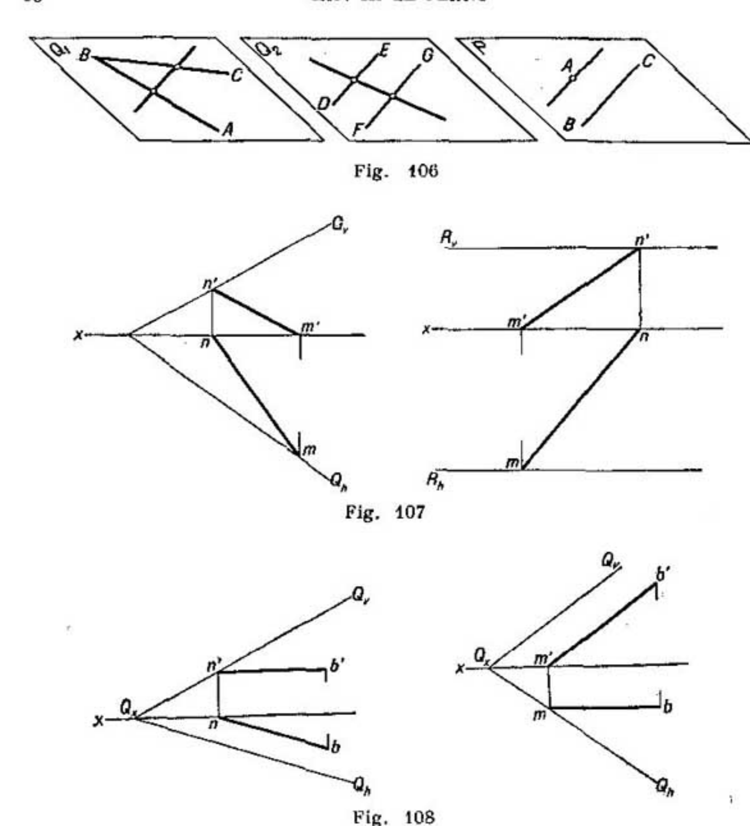


Fig. 106

Fig. 107

Fig. 108

De aquí se deriva que si el plano está dado por sus trazas, entonces, *la recta pertenece al plano, si las trazas de esta recta se encuentran en las trazas del plano del mismo nombre que éstas* (fig. 107).

Supongamos que el plano P (fig. 106) esté determinado por el punto A y la recta BC. De acuerdo con la segunda hipótesis, la recta trazada por el punto A paralelamente a la recta BC, pertenece al plano P. De aquí que: *la recta pertenece al plano, si es paralela a una de las trazas de este plano y tiene un punto común con la otra traza* (fig. 108).

Los ejemplos de construcción expuestos en las figs. 107 y 108 no deben ser interpretados en el sentido de que para la construción de una recta sobre un plano es necesario previamente construir las trazas de este plano. Claro está, que esto no es obligatorio.

Por ejemplo, en la fig. 109 se da la construcción de la recta *AM* en el plano dado por el punto *A* y una recta que pasa por el punto *L*. Supongamos que la recta *AM* deba ser paralela al plano *H*. La construcción se ha iniciado trazando

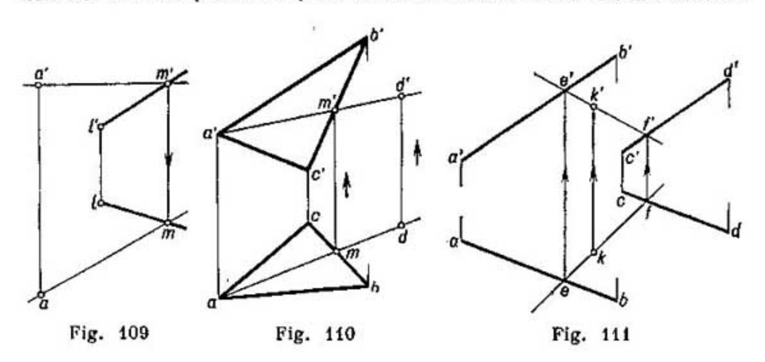


Fig. 109 Fig. 110 Fig. 111

las proyecciones *a'm'* perpendicularmente a la línea de referencia *a'a*. Con ayuda del punto *m'* se ha hallado el punto *m* y, a continuación, ha sido trazada la proyección *am*. La recta *AM* corresponde a la condición: es paralela al plano *H* y está situada en el plano dado, por pasar por dos puntos (*A* y *M*) pertenecientes a ciencia cierta, a este plano.

¿Cómo construir en el dibujo un punto perteneciente a un plano dado? Para hacer esto, *se construye previamente una recta situada en el plano dado, y sobre esta recta se toma un punto.*

Por ejemplo, se exige hallar la proyección frontal del punto *D*, si está dada su proyección horizontal *d* y se conoce que el punto *D* debe pertenecer al plano determinado por el triángulo *ABC* (fig. 110).

Primero se construye la proyección horizontal de cierta recta de modo que el punto *D* pueda encontrarse sobre esta recta, y esta última esté situada sobre el plano dado. Para ello se traza una recta por los puntos *a* y *d* y se marca el punto *m*, en el cual la recta *ad* interseca al segmento *bc*. Una vez construida la proyección frontal *m'* sobre *b'c'*, se obtiene la recta *AM* situada en el plano dado: esta recta pasa por el punto *A* y el punto *M*, el primero de los cuales es notoriamente un punto de este plano y el segundo está construido en éste.

La proyección frontal buscada *d'* del punto *D* deberá encontrarse sobre la proyección frontal de la recta *AM*.

En la fig. 111 se da otro ejemplo. En el plano Q, dado por dos rectas paralelas AB y CD, debe encontrarse el punto K, dado solamente por su proyección horizontal k. Por el punto k se ha trazado cierta recta tomada como proyección horizontal de la recta sobre el plano dado. Con ayuda de los puntos e y f construimos e' sobre $a'b'$ y f' sobre $c'd'$. La recta construida EF pertenece al plano Q por pasar por los puntos E y F pertenecientes notoriamente al plano. Si se toma el punto k' sobre $e'f'$, el punto K se encontrará en el plano Q.

Al número de rectas que ocupan una posición particular en el plano se referirán: las *horizontales*, *frontales*[1] *y líneas de máxima inclinación a los planos de proyección*. A la línea de máxima inclinación al plano H la llamaremos *línea de pendiente del plano*[2]. *Se llaman horizontales del plano a las rectas situadas en este plano y paralelas al plano horizontal de proyección.*

Construyamos la horizontal del plano, dado por el triángulo ABC. Es necesario trazar la horizontal por el vértice A (fig. 112).

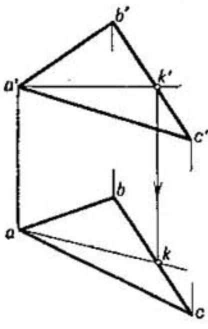


Fig. 112

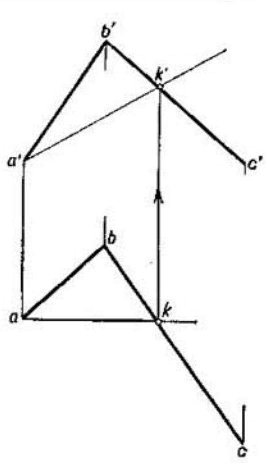


Fig. 113

Puesto que la horizontal del plano es una recta paralela al plano H, la proyección frontal de esta recta se obtendrá trazando $a'k' \perp a'a$. Para construir la proyección horizontal de esta horizontal construimos el punto k y trazamos una recta por los puntos a y k.

---

[1] Simultáneamente con las horizontales y las frontales del plano se pueden examinar sus líneas de perfil, es decir, las rectas situadas en este plano y paralelas al plano W. A las horizontales, frontales y rectas de perfil se les suele llamar líneas de nivel. Sin embargo, tal denominación corresponde a la idea corriente sólo de horizontalidad.

[2] Para las líneas de pendiente del plano está difundido el nombre de «líneas de máxima pendiente», pero la noción «pendiente» respecto al plano no exige la adición «máxima».

La recta construida AK es, en efecto, la horizontal del plano dado: esta recta está situada en el plano, por pasar por dos puntos pertenecientes notoriamente a este plano, y es paralela al plano de proyección H.

Ahora examinemos la construcción de la horizontal de un plano, dado por sus trazas.

La traza horizontal de un plano es una de sus horizontales (la horizontal «nula»). Por esta razón, la construcción de una horizontal cualquiera de un plano se reduce a la construcción en este plano de una recta paralela a la traza horizontal del plano (fig. 108, a la izquierda). La proyección horizontal de la horizontal es paralela a la traza horizontal del plano; la proyección frontal de la horizontal es paralela al eje de proyección.

Se llaman frontales de un plano a las rectas situadas en este plano y paralelas al plano de proyección V.

En la fig. 113 se da un ejemplo de la construcción de la frontal de un plano. La construcción se ha realizado de manera análoga a la construcción de la horizontal (véase la fig. 112).

Supongamos que la frontal pase por el punto A (fig. 113). Comenzamos la construcción trazando la proyección horizontal de la frontal, o sea, la recta ak, por ser conocida la dirección de esta proyección: $ak \perp a'a$. Luego construimos la proyección frontal de la frontal, es decir, la recta $a'k'$.

La recta construida es, en efecto, la frontal del plano dado: esta recta está situada en el plano, por pasar por dos puntos pertenecientes notoriamente a este plano, y es paralela al plano V.

Construyamos ahora la frontal de un plano, dado por sus trazas.

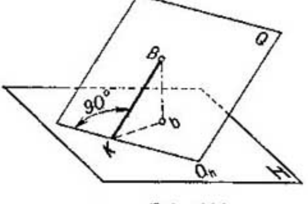
Al examinar la fig. 108, a la derecha, en la que están representados el plano Q y la recta MB, establecemos que esta recta es la frontal del plano. En efecto, ella es paralela a la traza frontal (a la frontal «nula») del plano. La proyección horizontal de la frontal es paralela al eje x, la proyección frontal de la frontal es paralela a la traza frontal del plano.

Se llaman líneas de máxima inclinación del plano a los planos H, V y W, a las rectas situadas en este plano y perpendiculares a las horizontales del plano, a sus frontales o a sus rectas de perfil. En el primer caso se determina la inclinación al plano H, en el segundo, al plano V, y en el tercero, al plano W. Para trazar las líneas de máxima inclinación del plano se puede, claro está, tomar correspondientemente sus trazas.

Como se dijo más arriba, la línea de máxima inclinación del plano al plano H se llama *línea de pendiente del plano.*

De acuerdo con las reglas de proyección de un ángulo plano (véase el § 15), la proyección horizontal de la línea de pendiente de un plano es perpendicular a la proyección horizontal de la horizontal del plano o a su traza horizontal. La proyección frontal de la línea de pendiente

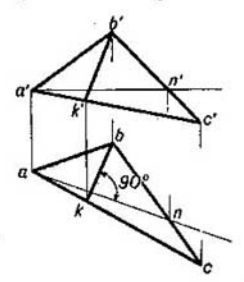
se construye después de la horizontal y puede ocupar diferentes posiciones en dependencia de cómo esté dado el plano. En la fig. 114 está representada la línea de pendiente del plano Q: $BK \perp Q_h$. Por ser bK también perpendicular a Q_h, el $\angle BKb$ es el ángulo lineal del diedro formado por los planos Q y H. Por consiguiente, *la línea de pendiente de un plano puede servir para determinar el ángulo de inclinación de este plano al plano de proyección H.*



Fgi. 114

Análogamente, la línea de máxima inclinación de un plano al plano de proyección V sirve para determinar el ángulo formado por este plano con el plano V, y la línea de máxima inclinación al plano W, para determinar el ángulo con el plano W.

En la fig. 115 están construidas las líneas de pendiente en los planos dados. El ángulo formado por el plano P con el plano H está expresado por sus proyecciones, la frontal en forma del ángulo $b'k'b$ y la horizontal en forma del segmento kb. Se puede determinar la magnitud de este ángulo construyendo un triángulo rectángulo por los catetos, iguales a kb y $b'b$.



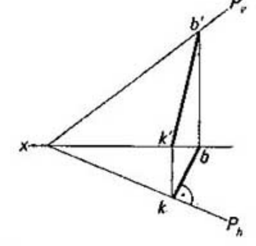


Fig. 115

Evidentemente, la línea de máxima inclinación del plano define la posición de este plano. Por ejemplo, si (fig. 115) está dada la línea de pendiente KB, entonces, trazando perpendicularmente a ella la recta horizontal AN o fijando el eje de proyección x y trazando $P_h \perp kb$, quedará determinado por completo el plano para el cual KB es la línea de pendiente.

Las rectas de posición particular en el plano examinadas por nosotros, principalmente las horizontales y las frontales, se emplean frecuentemente en diferentes construcciones y al resolver problemas. Esto se explica por la sencillez de la construcción de las rectas indicadas; por esta razón es cómodo emplearlas en calidad de rectas auxiliares.

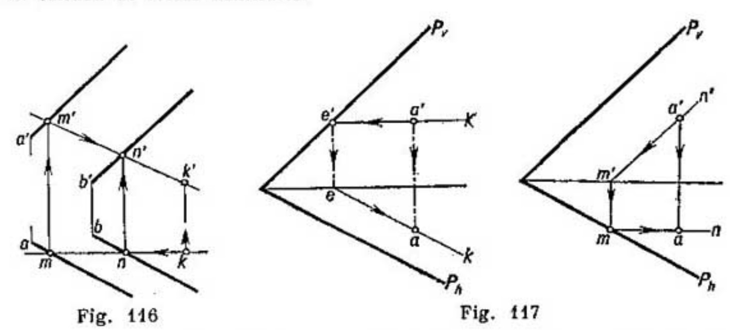
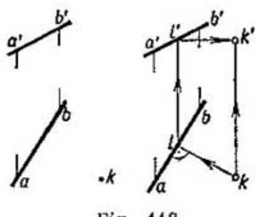


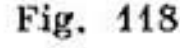
Fig. 116 Fig. 117

En la fig. 116 fue dada la proyección horizontal k del punto K. Se exigía hallar la proyección frontal k', si el punto K debía estar en el plano, dado por dos rectas paralelas trazadas a partir de los puntos A y B.

Primero fue trazada cierta recta que pasaba por el punto K y perteneciente al plano dado. En calidad de tal recta se eligió la frontal MN: su proyección horizontal fue trazada por la proyección dada k. A continuación fueron construidos los puntos m' y n', que determinan la proyección frontal de la frontal.

La proyección buscada k' deberá estar sobre la recta $m'n'$.




Fig. 118

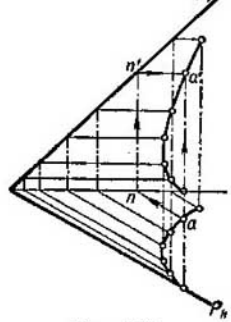


Fig. 119

En la fig. 117, a la izquierda, por la proyección frontal dada a' del punto A, perteneciente al plano P, se ha hallado su proyección horizontal (a); la construcción se ha cumplido con ayuda de la horizontal EK.

En la fig. 117, a la derecha, un problema similar ha sido resuelto con ayuda de la frontal MN.

En la fig. 118 se da un ejemplo más de la construcción de la proyección que falta del punto perteneciente a un plano. A la izquierda se muestran los datos

conocidos: la línea de pendiente del plano (AB) y la proyección horizontal del punto (k). A la derecha se da la construcción: por el punto k ha sido trazada (perpendicularmente a ab) la proyección horizontal de la horizontal, sobre la cual deberá estar situado el punto K, con ayuda del punto l' se ha hallado la proyección frontal de esta horizontal y sobre ella, la proyección buscada k'.

En la fig. 119 se da un ejemplo de la construcción de la segunda proyección de una curva plana, si se conoce una de sus proyecciones (la horizontal) y el plano P, en el que esta curva está situada. Tomando sobre la proyección horizontal de la curva una serie de puntos, hallamos, con ayuda de las horizontales, los puntos para la construcción de la proyección frontal de la curva.

Las flechas indican la marcha de la construcción de la proyección frontal a' con ayuda de la proyección horizontal a.

PREGUNTAS A LOS §§ 16—18

1. ¿Cómo se da el plano en el dibujo?
2. ¿Qué significa traza de un plano en el plano de proyección?
3. ¿Dónde se sitúan la proyección frontal de la traza horizontal y la proyección horizontal de la traza frontal de un plano?
4. ¿Cómo se determina en el dibujo, pertenece o no una recta al plano dado?
5. ¿Cómo construir en el dibujo un punto perteneciente al plano dado?
6. ¿A qué se le llama frontal, horizontal y línea de pendiente de un plano?
7. ¿Puede servir la línea de pendiente de un plano para determinar el ángulo de inclinación de este plano al plano de proyección H?
8. ¿Define una recta a un plano, para el cual esta recta es la línea de pendiente?

§ 19. POSICIÓN DE UN PLANO RESPECTO A LOS PLANOS DE PROYECCIÓN

Son posibles las siguientes posiciones de un plano respecto a los planos de proyección V, H, W:

1) *el plano no es perpendicular a ninguno de los planos de proyección;*

2) *el plano es perpendicular solamente a uno de ellos;*

3) *el plano es perpendicular a dos planos de proyección.*

Los planos de la segunda y tercera posiciones llevan el nombre común de «planos proyectantes».

1. *El plano no perpendicular a ninguno de los planos de proyección es un plano de posición general* (véase la fig. 105).

Examinemos, por ejemplo, el plano representado en la fig. 112.

Este plano no es perpendicular ni al plano V, ni al H, ni al W. El hecho de que este plano no es perpendicular ni al plano V, ni al H, se confirma con la forma de las proyecciones $a'b'c'$ y abc: si el plano, definido por el triángulo ABC, fuera perpendicular por lo menos al plano H, entonces (fig. 120) la proyección abc representaría el segmento de una recta.

Así pues, el plano examinado no es perpendicular ni al plano V, ni al H. ¿Pero, puede ser que este plano sea perpendicular al plano W? No, la horizontal de este plano AK no es perpendicular a W (com-

párese con la fig. 54, donde se muestra una recta perpendicular a W) y, por consiguiente, el plano ABC no es perpendicular a W.

Así pues, en la fig. 112 se expone un ejemplo de cómo se da el plano de posición general en el sistema V, H.

En calidad de otros ejemplos de cómo se da el plano de posición general sirven las figs. 109, 110, 111, 113, 116, así como las figs. 102, 104, 107, a la izquierda, 108, 115, a la derecha, 117, 119, en las que los planos están expresados por sus trazas. *El plano de posición general* (fig. 105) *interseca a cada uno de los ejes* x, y, z. *Las trazas del plano de posición general nunca son perpendiculares a estos ejes de proyección.*

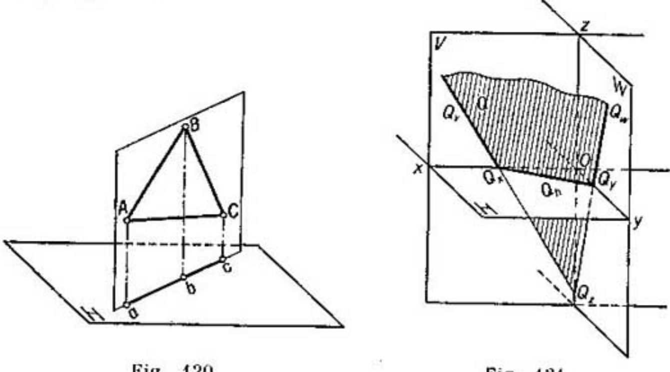


Fig. 120 Fig. 121

Si las trazas P_h y P_v del plano de posición general forman con el eje x ángulos iguales, esto significa que los ángulos formados por el plano P con los planos H y V son iguales entre sí. En efecto, si los ángulos planos de un ángulo triédrico son iguales entre sí, serán también iguales los ángulos diedros opuestos; los ángulos formados por las trazas P_h y P_v con el eje x (véase la fig. 105), representan ángulos planos frente a los cuales se encuentran respectivamente los ángulos diedros formados por el plano P con los planos de proyección V y H.

Si el plano de posición general debe tener la misma inclinación a los planos H, V y W, entonces (véase la fig. 105), evidentemente, $OP_x = OP_y = OP_z$, es decir, las trazas de este plano forman con los ejes de proyección ángulos de 45°.

Examinando el plano de posición general en el espacio en los límites del primer cuadrante o del primer octante, observamos que

El plano Q representado en la fig. 121, pasa por todos los octantes, excepto el sexto.

el ángulo entre las trazas horizontal y frontal puede ser agudo (véase la fig. 105) u obtuso (fig. 121).

Si el dibujo del plano de posición general se construye por las coordenadas de los puntos de intersección de las trazas, entonces, evidentemente, en la fig. 121 deben ser dadas las abscisas positivas y la ordenada de los puntos Q_x y Q_y y la Z-coordenada negativa del punto Q_z.

En la fig. 122 está representado un caso particular del plano de posición general; sus trazas P_h y P_v se encuentran en el dibujo sobre una misma recta. Recordando el esquema de abatimiento de los planos de proyección (fig. 15 en la pág. 20), observaremos que las trazas P_h y P_v forman iguales ángulos con el eje x no sólo en el dibujo, sino también en el espacio. Como se muestra en la fig. 122 a la derecha, de la igualdad de los triángulos rectángulos k_0kP_x y $k'kP_x$ se desprende que el ángulo k_0P_xk es igual al kP_xk', es decir, la traza P_v forma con el eje x el mismo ángulo que la traza P_h.

Por tanto, el plano P forma ángulos iguales con los planos H y V. La parte del plano P, que se encuentra en el primer cuadrante, contiene el ángulo verdadero entre P_h y P_v (en nuestro ejemplo es obtuso).

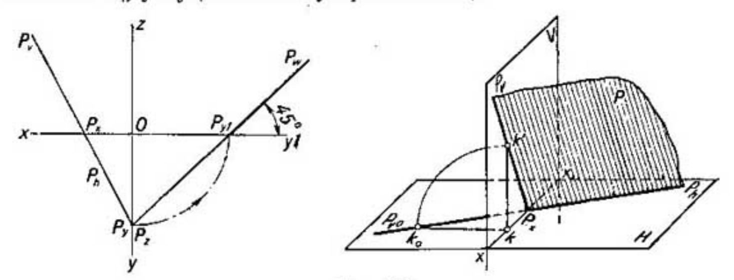


Fig. 122

En la fig. 122 se muestra también la construcción de la tercera traza del plano (P_w) por dos trazas dadas P_h y P_v. Por estar las trazas P_h y P_v situadas sobre una misma recta, el punto P_z se confunde con el P_y, y, por consiguiente, el punto P_{y1} se encuentra a la misma distancia del punto O que el punto P_x; por eso la traza P_w está inclinada al eje y (y al eje z) bajo un ángulo de 45°; precisamente tal ángulo de inclinación de la traza de perfil se obtendrá en todos los casos de construcción del plano, cuyas trazas horizontal y frontal están situadas en el dibujo sobre una recta que corta al eje x bajo un ángulo agudo.

Tal plano pasa por la perpendicular al eje x, que forma con el plano V (o con el H) un ángulo igual a 45°. Y, puesto que esta perpendicular es la perpendicular al plano bisector de los ángulos diedros adyacentes al ángulo VH, el plano examinado puede ser definido como un plano perpendicular al plano bisector del segundo y cuarto cuadrantes.

2. Si el plano es perpendicular solamente a uno de los planos de proyección, son posibles tres casos de posiciones particulares.

a) *El plano es perpendicular al plano horizontal de proyección. A tales planos se les llama planos proyectantes horizontales.*

Un ejemplo de este caso se da en la fig. 123: el plano está dado por las proyecciones del triángulo ABC. La proyección horizontal

representa el segmento de una recta. El ángulo β es igual al ángulo formado por el plano dado con el plano de proyección V.

En la fig. 124 se da un ejemplo de la representación de un plano proyectante horizontal por sus trazas: a la izquierda una representación demostrativa; en el centro, el dibujo en el sistema V, H con indicación del eje x y las trazas S_v y S_h, a la derecha, sin la indicación del eje x, y por consiguiente, sin la traza S_v.

La traza frontal es perpendicular al plano H y al eje de proyección x. La traza horizontal puede formar con el eje de proyección cualquier ángulo; este ángulo sirve de ángulo lineal del ángulo diedro entre el plano proyectante horizontal y el plano de proyección V

El ángulo entre S_h y S_v, así como el ángulo entre S_h y S_w en el espacio es igual a 90°.

Fig. 123

Si en el plano proyectante horizontal está situado un punto, su proyección horizontal deberá estar en la traza horizontal del plano. Esto se refiere también a cualquier sistema de puntos situados en el plano proyectante horizontal, sean líneas rectas, o curvas y figuras planas.

La traza S_h puede ser examinada como proyección horizontal del plano.

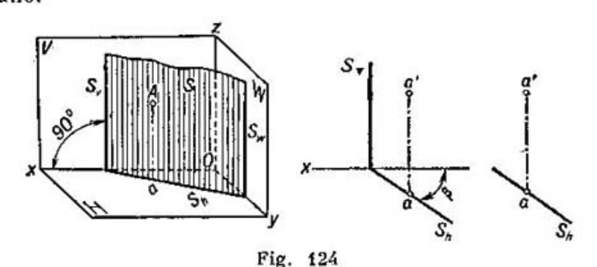


Fig. 124

b) *El plano es perpendicular al plano frontal de proyección. A tales planos se les llama planos proyectantes frontales.*

Un ejemplo de este caso se da en la fig. 125: el plano está dado por las proyecciones del triángulo DEF. La proyección frontal representa el segmento de una recta. El ángulo α es igual al ángulo formado por DEF con el plano H.

En la fig. 126 a la izquierda se da la representación demostrativa; en el centro, el dibujo en el sistema V, H con indicación del eje de proyección; a la derecha, sin indicación del eje de proyección. La

traza horizontal es perpendicular al plano V y al eje de proyección. La traza frontal puede formar con el eje de proyección cualquier ángulo; este ángulo sirve de ángulo lineal del diedro entre el plano proyectante frontal y el plano V.

El ángulo entre T_v y T_h en el espacio es igual a 90°.

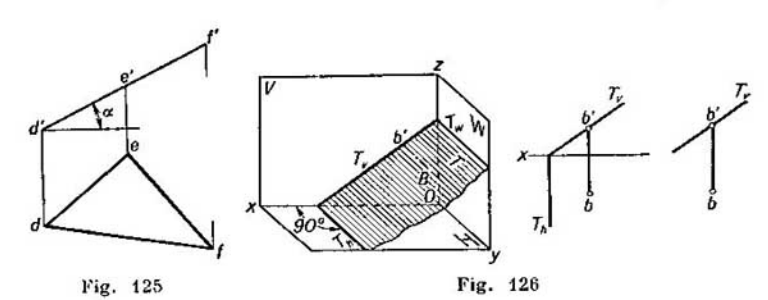


Fig. 125 Fig. 126

Si en el plano proyectante frontal está situado un punto, su proyección frontal deberá encontrarse sobre la traza frontal del plano. Esto se refiere también a cualquier sistema de puntos. La traza T_v (fig. 126) puede ser examinada como proyección frontal del plano T.

c) *El plano es perpendicular al plano de perfil de proyección. A tales planos se les llama planos proyectantes de perfil.*

En la fig. 127 se da un ejemplo del plano proyectante de perfil: el plano viene dado por las proyecciones del triángulo ABC. La horizontal de este plano es perpendicular al plano W: las proyecciones $a'd'$ y ad son paralelas. Esto demuestra que el plano examinado es un plano proyectante de perfil, y no un plano de posición general (compárese con la fig. 112).

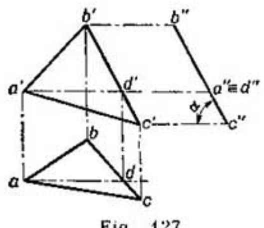


Fig. 127

La proyección de perfil del triángulo ABC representa el segmento de una recta. El ángulo α formado por este segmento con la línea de referencia $c'c''$ es igual al ángulo de inclinación del plano del triángulo al plano H, y el ángulo de inclinación del plano del triángulo al plano V es igual a $90°-\alpha$.

En la fig. 128 se da un ejemplo de la representación de un plano proyectante de perfil por sus trazas.

Las trazas horizontal y frontal de este plano son paralelas al eje x y, por consiguiente, son paralelas entre sí.

El plano representado en la fig. 107 a la derecha, también es un plano proyectante de perfil.

El plano perpendicular a uno de los planos de proyección (plano proyectante horizontal, frontal o de perfil) puede, en particular, pasar por el eje de proyección. A tal plano se le llama complementariamente plano axial.

Examinemos, por ejemplo, un plano proyectante de perfil axial (fig. 129). Sus trazas R_v y R_h se confunden con el eje x; en este caso es necesario tener su

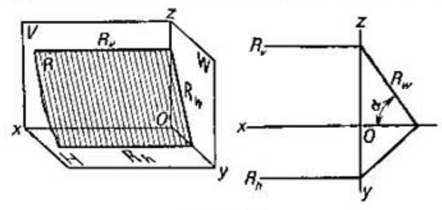


Fig. 128

tercera traza R_w o por lo menos la posición de un punto perteneciente a este plano y no situado sobre el eje x.

El plano axial puede ser *bisector*; esto significa que el plano axial divide al ángulo diedro formado por los planos de proyección por la mitad.

¿Cómo se puede representar el plano proyectante de perfil en el dibujo sin ejes de proyección? Así como se representa en la fig. 127. Otro ejemplo se da en la fig. 130: el plano viene dado por dos rectas que se cortan, una de las cuales (AB) es perpendicular al plano W, y la otra ocupa una posición arbitraria.

3. Si el plano es perpendicular a dos planos de proyección, también son posibles tres casos de posiciones particulares.

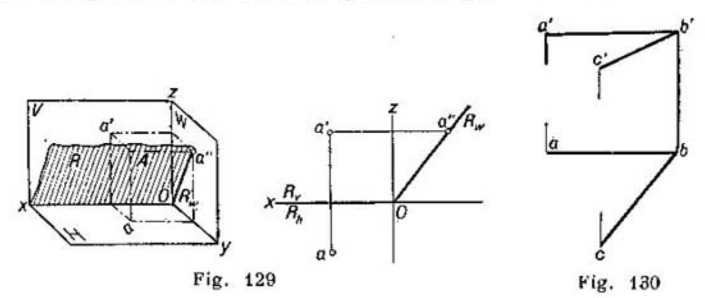


Fig. 129 Fig. 130

a) *El plano es perpendicular a los planos V y W, es decir, es paralelo al plano H. A tales planos se les llama horizontales.*

En la fig. 131 se da un ejemplo del plano horizontal dado por las proyecciones del triángulo ABC. En la fig. 132 a la derecha, está representado un plano horizontal en el sistema V, H con ayuda de la

traza frontal. La traza (T_v) puede ser considerada como proyección frontal del plano.

b) *El plano es perpendicular a los planos de proyección H y W, es decir, es paralelo al plano de proyección V. A tales planos se les llama frontales.*

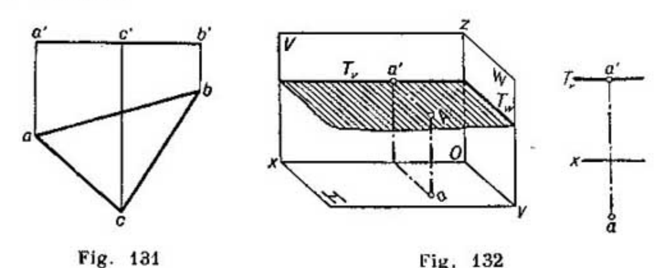


Fig. 131 Fig. 132

En la fig. 133 se da un ejemplo del plano frontal representado por las proyecciones del triángulo *CDE*.

En la fig. 134 a la derecha se da un ejemplo de la representación del plano frontal en el sistema *V*, *H* con ayuda de la traza S_h que puede ser considerada como proyección de este plano sobre el plano *H*.

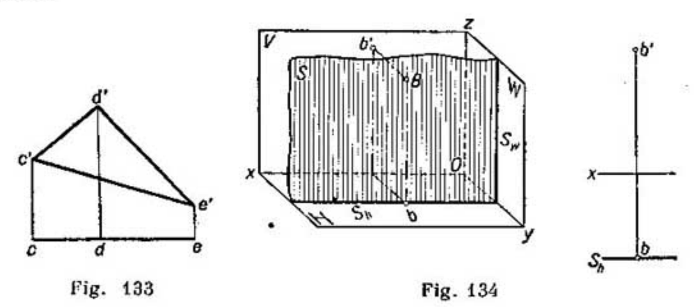


Fig. 133 Fig. 134

c) *El plano es perpendicular a los planos de proyección H y V, es decir, es paralelo al plano W. A tales planos se les llama de perfil.*

En la fig. 135 se da un ejemplo de la representación de tal plano en el sistema *V*, *W*: el plano está dado por las proyecciones del triángulo *EFG*.

En la fig. 136 se da un ejemplo de la representación de tal plano en el sistema *V*, *H* con ayuda de sus trazas. Cada una de estas trazas

puede ser considerada como la proyección del plano P sobre el correspondiente plano de proyección. El plano de perfil reúne las propiedades de los planos proyectantes horizontal y frontal.

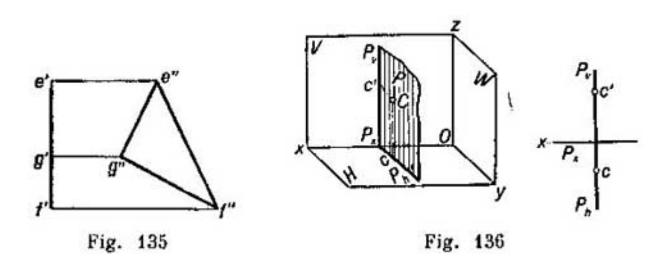


Fig. 135 Fig. 136

PREGUNTAS AL § 19

1. ¿Cómo se sitúan en el sistema V, H, W el plano de posición general y los planos llamados proyectantes?

2. ¿Qué significa plano proyectante frontal, plano proyectante horizontal y plano proyectante de perfil?

3. ¿Cómo determinar si el plano dado en el sistema V, H por rectas que se cortan o paralelas es un plano de posición general o un plano proyectante de perfil?

4. ¿Qué representa la proyección horizontal de un plano proyectante horizontal y de un plano frontal?

5. ¿Qué representa la proyección frontal de un plano proyectante frontal y de un plano horizontal?

6. ¿Dónde se encuentra la proyección horizontal de cualquier sistema de puntos, situado en el plano proyectante horizontal o en el plano frontal?

7. ¿Dónde se encuentra la proyección frontal de cualquier sistema de puntos, situado en el plano horizontal o en el plano proyectante frontal?

8. ¿A qué es igual en el espacio el ángulo entre las trazas frontal y horizontal de los planos proyectantes horizontal y frontal?

§ 20. TRAZADO DEL PLANO PROYECTANTE POR UNA LINEA RECTA

Más adelante nos encontraremos con la necesidad de trazar un plano proyectante por una línea recta de acuerdo con alguna condición. Por la línea recta de posición general se puede trazar cualquiera de tales planos. En la fig. 137 se dan algunos ejemplos. Por una recta dada en el sistema V, H y que pasa por el punto K, se han trazado: el plano proyectante frontal expresado por su traza frontal T_v; el plano proyectante horizontal expresado por su traza horizontal S_h; y el plano proyectante de perfil determinado, además de por la recta dada AK, por la recta AB perpendicular al plano W.

En la fig. 138, los planos, trazados por la recta dada, están expresados por sus trazas. La posición del eje x, puede ser dada o puede ser elegida.

Pero, *por la recta de posición general no se puede trazar ni el plano frontal, ni el horizontal, ni el de perfil.* Estos planos pueden ser trazados solamente por rectas dispuestas correspondientemente: por

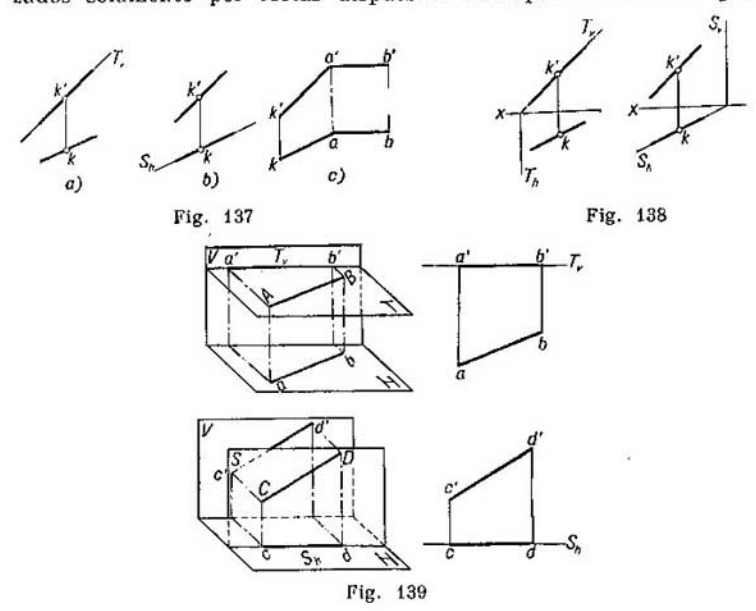


Fig. 137

Fig. 138

Fig. 139

una recta horizontal trazar el plano horizontal; por una recta frontal, el plano frontal; y por una recta de perfil, el plano de perfil. En la fig. 139 están representados el plano horizontal T que pasa por la recta horizontal AB, y el plano frontal S que pasa por la recta frontal CD.

§ 21. CONSTRUCCION DE LAS PROYECCIONES DE FIGURAS PLANAS

La construcción de las proyecciones de figuras planas (es decir, las figuras, todos los puntos de las cuales están situados en un mismo plano, por ejemplo, el cuadrado, el círculo, la elipse, etc.) se reduce a la construcción de las proyecciones de una serie de puntos, de seg-

mentos de rectas y de líneas curvas que forman los contornos de las proyecciones de las figuras. Conociendo las coordenadas de los vértices, por ejemplo, de un triángulo, se puede construir las proyecciones de estos puntos, y luego las proyecciones de los lados, obteniendo de tal modo las proyecciones de la figura.

Más arriba ya aparecieron dibujos con las proyecciones de un triángulo (por ejemplo, las figs. 110, 112 y otras). Si se comparan las figs. 110 y 112, se puede observar que en la fig. 110 una de las proyecciones, supongamos la frontal, representa la «cara» del triángulo, y la horizontal, su «reverso». En la figura 112 cada una de las proyecciones representa al triángulo visto desde un mismo lado. Como índice puede servir el orden de recorrido de los vértices: en la fig. 110, para la proyección frontal, en sentido de las agujas del reloj (contando de a' a c'), y para la proyección horizontal, en sentido contrario a las agujas del reloj; en la fig. 112, para ambas proyecciones el recorrido es en una misma dirección, en el caso dado, en sentido de las agujas del reloj.

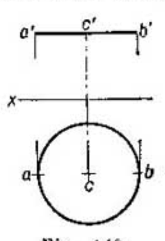


Fig. 140

En el caso general, las proyecciones de un polígono cualquiera en el sistema V, H, W también representan polígonos con la misma cantidad de lados; en este caso, el plano de este polígono es un plano de posición general. Pero, si ambas proyecciones por ejemplo, de un triángulo, representan en el sistema V, H un triángulo, entonces, el plano de este triángulo puede ser un plano de posición general o un plano proyectante de perfil: en la fig. 112 es un plano de posición general, y en la fig. 127, un plano proyectante de perfil. Como determinante sirve, como se dijo en la pág. 70 en la aclaración de la fig. 127, la horizontal (o la frontal): si sus proyecciones sobre los planos V y H son paralelas, el plano es proyectante de perfil (fig. 127); si no son paralelas, entonces es un plano de posición general (por ejemplo, las figs. 112 y 115, a la izquierda).

Si la proyección de un polígono sobre el plano V o sobre el H representa el segmento de una recta, el plano de este polígono es perpendicular a V o a H respectivamente. Por ejemplo, en la fig. 123 el plano del triángulo es un plano proyectante horizontal, y en la fig. 125, un plano proyectante frontal.

La figura dispuesta paralelamente al plano de proyección, se proyecta sobre éste en su verdadera magnitud. Por ejemplo, todos los elementos del triángulo CDE representado en la fig. 133, se proyectan sobre el plano V en verdadera magnitud; el círculo, representado en la fig. 140, se proyecta sobre el plano H en verdadera magnitud.

Si el plano de la figura no es paralelo al plano de proyección, entonces, para determinar la forma verdadera (es decir, sin deforma-

ción) de esta figura se emplean los procedimientos expuestos a continuación en el capítulo V. Claro está, que también ahora, sin conocer todavía estos procedimientos, se podría construir, por ejemplo la forma verdadera del triángulo representado en la fig. 112, determinando la longitud de cada uno de sus lados como la longitud de un segmento (véase el § 13) y luego construyendo el triángulo por los segmentos hallados. Al mismo tiempo se determinarían los ángulos del triángulo dado. Así se procede, por ejemplo, al construir

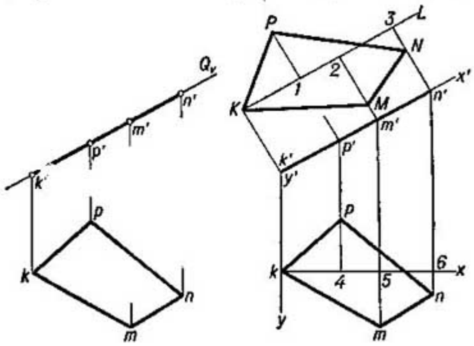


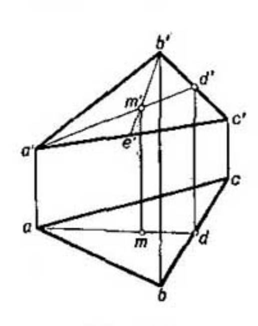
Fig. 141

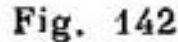
el desarrollo de la superficie lateral de una pirámide, un prisma, y otras figuras (véase más adelante, el § 44). Si el polígono está situado en el plano proyectante, su forma verdadera puede ser construida tal como se muestra en la fig. 141.

Supongamos que se exige determinar la forma verdadera del cuadrilátero $KPNM$ situado en el plano proyectante de perfil Q. Entonces, como se muestra en la fig. 141, a la derecha, se pueden tomar en el plano de la figura dos ejes de coordenadas rectangulares con origen aunque sea en el punto K: el eje de las abscisas ($k'x'$, kx) es paralelo al plano V, y el eje de ordenadas es perpendicular a V (las proyecciones de este eje son $k'y'$, ky), trazar una recta KL (esto se puede hacer, por ejemplo, paralelamente a $k'x'$) y marcar en ella $K1=k'p'$, $K2=k'm'$, $K3=k'n'$. A continuación, sobre las perpendiculares a la recta KL desde los puntos 1, 2 y 3 tracemos los segmentos $P1=p4$, $M2=m5$ y $N3=n6$. El cuadrilátero $KMNP$ construido de tal modo representa la forma verdadera del dado.

Durante la resolución de muchos problemas es de suma importancia la posición que ocupa una figura plana respecto a los planos de proyección. Examinemos como ejemplo el problema de la construcción de los cuatro puntos notables del triángulo.

Puesto que la división del segmento de una recta en el espacio por la mitad corresponde a la misma división de las proyecciones de este segmento (véase el § 12), la construcción del punto de intersección de las medianas del triángulo[1] puede ser cumplida en el dibujo directamente, en todos los casos que se presenten. Basta (fig. 142) trazar las medianas en cada una de las proyecciones del triángulo, y el punto de intersección de sus medianas quedará determinado. En este caso, podemos limitarnos a la construcción de las dos proyecciones de una de las medianas (por ejemplo, ad y $a'd'$) y una de las proyecciones de la segunda mediana (por ejemplo, la $b'e'$); en la intersección de $a'd'$ y $b'e'$ obtenemos el punto m', y por este punto hallamos sobre ad el punto m.




Fig. 142

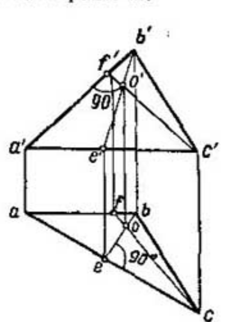


Fig. 143

Se podría también, construyendo solamente una de las medianas del triángulo, hallar sobre ella el punto M a base de la propiedad de este punto, conocida de la Geometría (este punto divide a cada una de las medianas en la relación de 2 : 1).

La construcción del punto de intersección de las tres alturas del triángulo[2] *y el punto de intersección de las perpendiculares a los lados del triángulo, trazadas desde sus puntos medios*[3], *está relacionado con el trazado de rectas perpendiculares entre sí.*

En el § 15 fueron señaladas las condiciones, para las cuales los segmentos perpendiculares en el espacio tienen como proyecciones también segmentos perpendiculares. Si el plano del triángulo es paralelo al plano de proyección (por ejemplo, el triángulo CDE en la fig. 133), entonces, bajando desde los puntos c', d' y e' perpendiculares a los lados opuestos, obtenemos las proyecciones de las alturas del triángulo. Pero, en el triángulo de posición general no se puede proceder de este modo.

En el caso particular, cuando uno de los lados del triángulo es paralelo al plano H, y otro es paralelo al plano V (fig. 143), trazando $c'f'$ perpendicularmente a $a'b'$ y be perpendicularmente a ac, obtenemos en el espacio $CF \perp AB$ y $BE \perp AC$; el punto de intersección de las alturas ha sido construido sin hacer uso de ningún procedimiento particular.

[1] El punto de intersección de las medianas es el centro de gravedad del triángulo.
[2] Ortocentro del triángulo.
[3] Centro de la circunferencia circunscrita.

En el propio caso general, para trazar en el dibujo de proyecciones líneas perpendiculares hay que recurrir a procedimientos especiales, que serán expuestos más adelante.

La construcción del *punto de intersección de las bisectrices del triángulo*[1] también puede ser ejecutada directamente solamente en los casos particulares de disposición del triángulo respecto a los planos de proyección. Esto se explica por que la división por la mitad de la proyección de un ángulo cualquiera corresponde a su división por la mitad en el espacio solamente en el caso en que los lados de este ángulo estén inclinados a una misma magnitud al plano de proyección en el que se divide por la mitad la proyección del ángulo (véase el § 15).

Al construir las proyecciones de un polígono cualquiera es necesario prestar atención a que no se incumpla la condición de que todos los puntos de la figura dada se encuentren en un mismo plano.

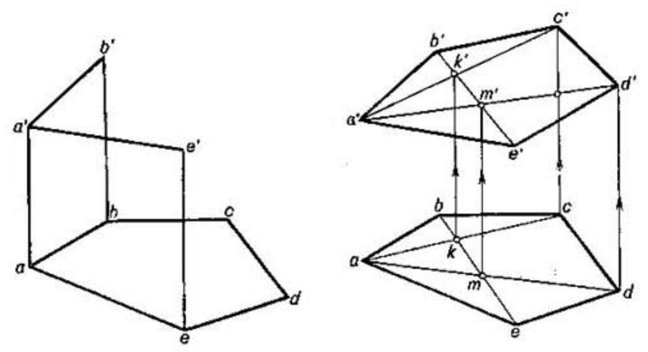


Fig. 144

En la fig. 144 se da completamente la proyección horizontal de un pentágono $ABCDE$ y las proyecciones frontales de solamente tres de sus vértices: a', b' y e'. En la fig. 144, a la derecha, se muestra la construcción de las proyecciones de los dos vértices restantes c' y d' del pentágono. Para que los puntos C y D se encuentren en el plano determinado por los tres puntos A, B y E, es necesario que se encuentren sobre rectas situadas en este plano. Tales rectas son las diagonales AC, AD y BE, cuyas proyecciones horizontales se pueden construir. En la proyección frontal del pentágono podemos trazar solamente $b'e'$. Pero, en el plano del pentágono se encuentran los puntos de intersección de las diagonales K y M, cuyas proyecciones horizontales (k y m) son conocidas, y las proyecciones frontales se obtienen en seguida, puesto que deben encontrarse sobre $b'e'$. Por dos puntos se construyen las proyecciones frontales $a'k'$ y $a'm'$ de

---

[1] Centro de la circunferencia inscrita.

las dos diagonales restantes; sobre ellas deben encontrarse los puntos c' y d' que se determinan por sus proyecciones horizontales.

El círculo cuyo plano es paralelo a un plano cualquiera de proyección, se proyecta sobre este plano en tamaño natural (véase la fig. 140, donde el círculo ha sido tomado en el plano horizontal). Si el plano del círculo está situado perpendicularmente al plano de proyección, sobre este plano el círculo se proyecta en forma del segmento de una recta igual al diámetro del círculo.

Pero, si el círculo está situado en un plano que forma con el plano de proyección un ángulo agudo α, *la proyección del círculo es una figura llamada elipse.*

Se llama también elipse a la curva que cierra la elipse figura: si la elipse figura es la proyección de un círculo, la elipse línea es la proyección de una circunferencia. Más adelante, al hablar de elipse tendremos en cuenta la proyección de una circunferencia.

La elipse se refiere a las curvas llamadas de segundo orden. Las ecuaciones de tales curvas en las coordenadas cartesianas representan ecuaciones de segundo orden. La curva de segundo orden se interseca con una línea recta en dos puntos. Más adelante nos encontraremos con la parábola y la hipérbola, también curvas de segundo orden.

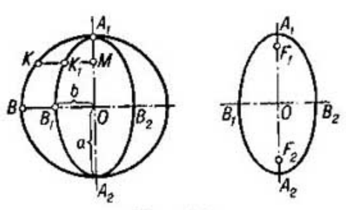


Fig. 145

La elipse puede considerarse como una circunferencia «comprimida». Esto se muestra en la fig. 145, a la izquierda. Supongamos que sobre el radio OB se ha trazado el segmento OB_1 de longitud b, con la particularidad de que $b<a$ (es decir, es menor que el radio de la circunferencia). Si tomamos ahora sobre la circunferencia un punto cualquiera K y, trazando desde el punto K una perpendicular A_1A_2, marcamos sobre KM el punto K_1 de modo que $MK_1 : MK = b : a$, entonces, este punto K_1 pertenecerá a la elipse. Así se puede transformar cada punto de la circunferencia en un punto de la elipse, conservando una misma relación $b : a$. La circunferencia como si se comprimiera regularmente: la línea en la que en este caso se transforma la circunferencia es una elipse. La relación $b : a$ se llama coeficiente de compresión de la elipse. Si b se aproxima a a, la elipse se ensancha, y cuando $b=a$ se transforma en una circunferencia.

Hacemos recordar (del curso de dibujo lineal de la escuela secundaria) que:
1) el segmento $A_1A_2=2a$ se llama *eje mayor* de la elipse,
2) el segmento $B_1B_2=2b$ se llama *eje menor* de la elipse,
3) los ejes mayor y menor son perpendiculares entre sí,
4) el punto de intersección de los ejes se llama *centro* de la elipse,
5) el segmento de una recta comprendido entre dos puntos de la elipse y que pasa por su centro se llama *diámetro* de la elipse,

6) los puntos A_1, A_2, B_1, B_2 se llaman *vértices* de la elipse,
7) la elipse es simétrica respecto a sus ejes y a su centro,
8) la elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a otros dos fijos F_1 y F_2 (fig. 145, a la derecha) es constante e igual a $2a$ (a la longitud del eje mayor).

Del examen de la fig. 146 se deriva que al girar la circunferencia alrededor del diámetro A_1A_2 un ángulo α, este diámetro, paralelo al plano H, conserva en su proyección horizontal su tamaño natural y se hace el eje mayor de la elipse (véase la fig. 146, a la derecha). El diametro B_1B_2 girado un ángulo α respecto al plano H, se proyecta sobre éste reducido : $b_1b_2=b'_1b'_2 \cos\alpha$. Esto corresponde a la relación de los ejes de la elipse, es decir, a su coeficiente de compresión.

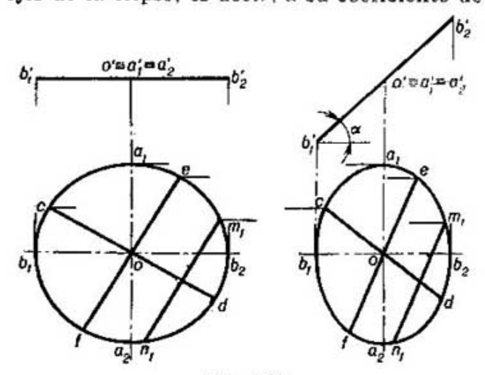


Fig. 146

Si en una circunferencia se trazan dos diámetros cualesquiera perpendiculares entre sí, entonces, en la proyección, que representa una elipse (fig. 146, a la derecha), las proyecciones de estos diámetros de la circunferencia serán los diámetros de la elipse, llamados *conjugados*. Si en una circunferencia (fig. 146, a la izquierda) se traza, por ejemplo, la cuerda m_1n_1 paralela al diámetro ef, entonces el diámetro cd dividirá a esta cuerda (y a todas las cuerdas paralelas a ésta) por la mitad. Es evidente, que también en la elipse se conservará esta propiedad (véase la fig. 146, a la derecha): el diámetro cd divide a la cuerda m_1n_1, paralela al diámetro ef conjugado con el cd, por la mitad. Pero precisamente *tales dos diámetros de la elipse, cada uno de los cuales divide por la mitad a las cuerdas paralelas al otro, son conjugados.*

Los diámetros conjugados de la elipse no son perpendiculares uno al otro; hacen una excepción los ejes de la elipse, que también son diámetros conjugados.

Hacemos recordar cómo se realiza la construcción de una elipse conociendo sus ejes (fig. 147, a la izquierda). Este trazado se cumple con ayuda de dos circunferencias concéntricas descritas con los radios a (el semieje mayor) y b (el semieje menor). Si se traza un radio cualquiera Om_1 y las rectas m_1m_0 y em paralelas a los ejes menor y mayor de la elipse, en la intersección de estas rectas se obtiene el punto m perteneciente a la elipse. En efecto,

$$\frac{mm_0}{m_1m_0}=\frac{Oe}{Om_1}=\frac{b}{a}.$$

Trazando una serie de radios y repitiendo la construcción indicada, obtenemos una serie de puntos de la elipse.

Una vez construido un punto cualquiera de la elipse, se pueden construir tres más dispuestos simétricamente al hallado respecto a los ejes de la elipse o a su centro.

En la fig. 147 a la derecha, se muestra la construcción de los focos de la elipse: trazando un arco de centro B_1 y radio igual al semieje mayor OA_1, en las intersecciones de este arco con el eje mayor, obtenemos los puntos F_1 y F_2 que son

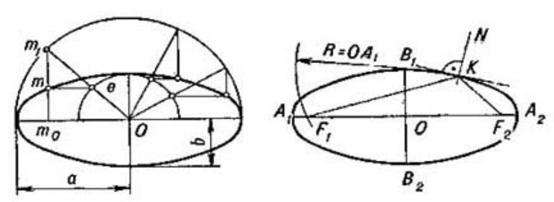


Fig. 147

los focos de la elipse. Trazando el ángulo F_1KF_2, donde K es un punto cualquiera de la elipse, trazamos su bisectriz y perpendicularmente a ésta, desde el punto K, una tangente a la elipse. La recta KN, perpendicular a la tangente, es la normal a la elipse en el punto K.

¿Cómo construir los ejes de la elipse si se conocen sus diámetros conjugados?

Supongamos que se hallan obtenido los semidiámetros conjugados Ca y Cb (fig. 148). Para construir los ejes de la elipse:

1) uno de los semidiámetros conjugados, por ejemplo, el Cb, se hace girar un ángulo de 90° en sentido del otro (hasta la posición Cb_2);

2) trazamos el segmento ab_2 y lo dividimos por la mitad;

3) desde el punto k trazamos una circunferencia de radio kC;

4) la recta determinada por el segmento ab_2, la prolongamos hasta su intersección con la circunferencia en los puntos D y E;

5) trazamos la recta DC y obtenemos la dirección del eje mayor de la elipse;

6) trazamos la recta EC, que nos da la dirección del eje menor de la elipse;

7) trazamos $C1=aE$, el semieje mayor;

8) trazamos $C3=aD$, el semieje menor;

9) trazamos $C2=C1$, $C4=C3$, $C5=Ca$, $C6=Cb$.

La elipse puede ser trazada por ocho puntos: *1*, a, *3*, b, *2*, *5*, *4* y *6*, o por los ejes mayor y menor, como se muestra en la fig. 147.

Así pues, trazando las rectas CD y CE, hemos obtenido las direcciones de los ejes mayor y menor de la elipse; el punto a, perteneciente a la elipse, divide

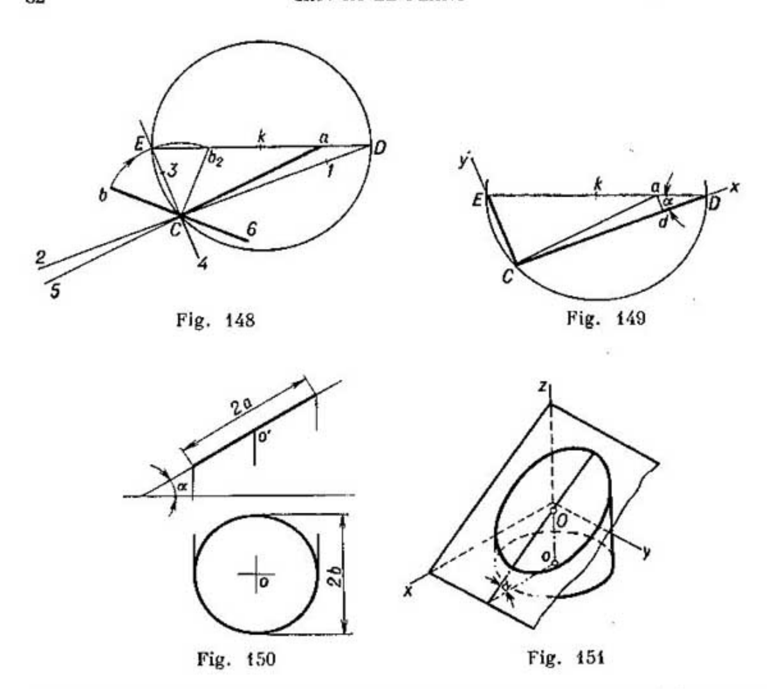


Fig. 148

Fig. 149

Fig. 150

Fig. 151

al diámetro ED en dos segmentos, uno de los cuales (el aE) es igual al semieje mayor de la elipse, y el otro (el aD), al semieje menor. Si (fig. 149) tomamos los ejes de coordenadas x e y por las rectas CD y CE respectivamente, y desde el punto a levantamos la perpendicular ad a la recta CD, entonces, las coordenadas del punto a pueden ser expresadas de la manera siguiente:

$$x_a = aE \cos \alpha, \qquad y_a = aD \operatorname{sen} \alpha.$$

De aquí que:

$$\frac{x_a^2}{(aE)^2} + \frac{y_a^2}{(aD)^2} = \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1.$$

Esta es la ecuación de la elipse, en la que aE es el semieje mayor, y aD, el semieje menor.

En la fig. 146 se mostró la construcción de la proyección horizontal de una circunferencia situada en el plano proyectante frontal inclinado respecto al plano H. Supongamos ahora que en este plano está situada una elipse cuyos semiejes son a y b. Su proyección puede, a veces, ser una circunferencia de diámetro igual al eje menor de la elipse; esto sucederá cuando el ángulo formado por

el plano al que pertenece la elipse, con el plano de proyección H corresponda a la relación $\cos\alpha=\frac{a}{b}$ (fig. 150). La circunferencia obtenida servirá de proyección de toda una serie de elipses, si se cambia el ángulo α y la dimensión a, conservando b invariable. Imaginémonos un cilindro circular recto con eje vertical (fig. 151); las secciones inclinadas de este cilindro serán elipses, el eje menor de las cuales es igual al diámetro del cilindro.

PREGUNTAS A LOS §§ 20 Y 21

1) ¿Cómo se representa en el dibujo un plano proyectante frontal trazado por una recta de posición general?

2) ¿Cómo construir las proyecciones del centro de gravedad en el dibujo dado del triángulo?

3) ¿Qué pueden representar las proyecciones de una circunferencia en dependencia de la posición de su plano respecto al plano de proyección?

4) ¿Se puede considerar la elipse como una circunferencia «comprimida»?

5) ¿Qué significa coeficiente de compresión de la elipse?

6) ¿Tiene la elipse: a) ejes de simetría, b) centro de simetría?

7) ¿Cuáles diámetros de la elipse se llaman: a) ejes, b) diámetros conjugados?

8) ¿Cómo construir los ejes de una elipse por sus diámetros conjugados dados?

IV

CAPÍTULO

POSICIÓN RECÍPROCA DE DOS PLANOS, DE UNA LÍNEA RECTA Y UN PLANO

§ 22. EXAMEN DE LAS POSICIONES RECÍPROCAS DE DOS PLANOS, DE UNA LÍNEA RECTA Y UN PLANO

Dos planos pueden ser paralelos entre sí o intersecarse uno con el otro.

Examinemos el caso de dos planos paralelos entre sí. *Si los planos P y Q son paralelos* (fig. 152), *entonces, en cada uno de ellos siempre se puede construir dos rectas que se cortan de modo tal, que las rectas de un plano sean respectivamente paralelas a las dos rectas del otro plano.*

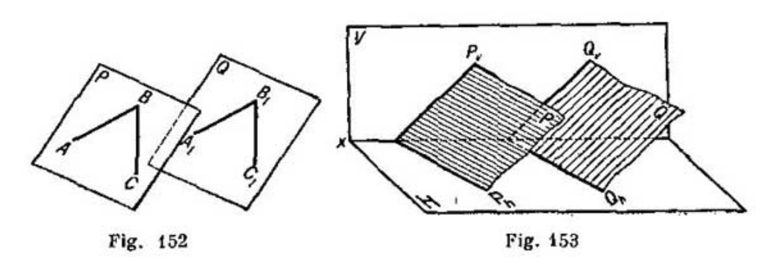


Fig. 152 Fig. 153

Esto es el índice fundamental para determinar si son los planos paralelos entre sí o no lo son. Como tales rectas pueden servir, por ejemplo, las trazas de ambos planos: *si dos trazas que se cortan de un plano son paralelas a sus trazas homónimas de otro plano, ambos planos son paralelos entre sí* (fig. 153, donde $P_h \| Q_h$, $P_v \| Q_v$).

En la fig. 154 se muestran dos planos proyectantes frontales paralelos entre sí, dados por los triángulos ABC y DEF. El parale-

lismo de estos planos queda determinado por el paralelismo de las proyecciones frontales $a'b'c'$ y $d'f'e'$. Si estos planos se expresaran por sus trazas sobre los planos de proyección V y H, entonces, lo mismo que en la fig. 153, sus trazas frontales serían paralelas entre sí,

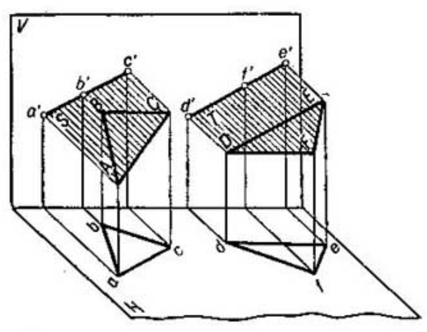


Fig. 154

y sus trazas horizontales también serían paralelas entre sí. Evidentemente, si se sabe que los planos paralelos entre sí son planos proyectantes frontales, entonces, en algunos casos, en el dibujo puede uno limitarse solamente a la reducción de sus trazas frontales así como se muestra a continuación en la fig. 166 ($T_{1v} \| Y_{2v}$). Para los planos proyectantes horizontales (si se conoce que éstos son paralelos entre sí) en los casos análogos es suficiente trazar sus trazas horizontales paralelamente una a la otra.

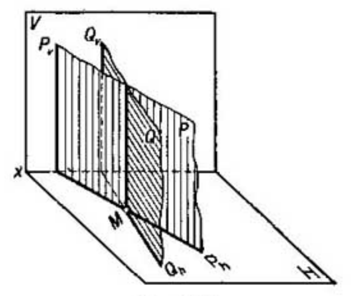


Fig. 155

Examinemos el caso de intersección de dos planos entre sí. En el caso en que los planos estén dados por sus trazas, será fácil establecer que estos planos se intersecan: *si por lo menos un par de trazas homónimas se intersecan, entonces, los planos también se intersecan*. Así, por ejemplo, en la fig. 155 $P_v \| Q_v$ pero, P_h y Q_h se cortan: los planos P y Q se intersecan uno al otro.

Lo expuesto se refiere a los planos dados por sus *trazas que se cortan*. Si ambos planos tienen sus trazas sobre H y V paralelas al eje x, entonces, estos planos pueden o bien intersecarse, o bien

ser paralelos. Para resolver el problema sobre la posición recíproca de tales planos, se puede trazar la tercera traza: si las trazas de ambos planos sobre el tercer plano de proyección también son paralelas una a la otra, los planos son paralelos (fig. 156: $Q_h \| R_h$, $Q_v \| R_v$ y $Q_w \| R_w$); si las terceras trazas se cortan, los planos se cortan (fig. 157)[1].

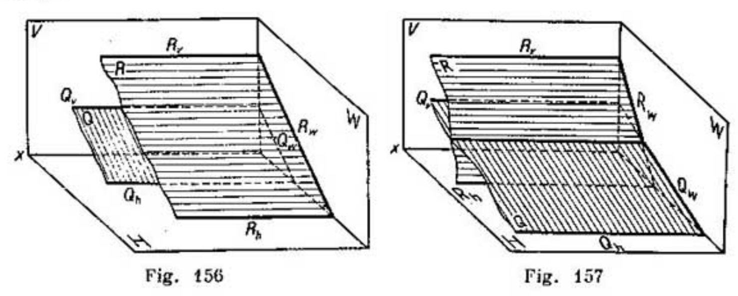


Fig. 156 Fig. 157

Así se resuelve el problema sobre la posición recíproca de dos planos *dados por sus trazas. Si los planos vienen dados no por sus trazas*, sino por otro método cualquiera y hay que hallar si se cortan o no estos planos, entonces, *se debe recurrir a ciertas construcciones auxiliares*. Más adelante se darán ejemplos de tales construcciones.

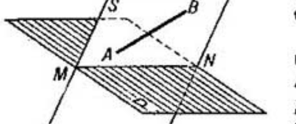


Fig. 158

Examinemos casos de la posición recíproca de una línea recta y un plano. *La posición recíproca de una recta y un plano en el espacio* puede ser la siguiente: a) la recta está situada en el plano, b) la recta interseca al plano, c) la recta es paralela al plano.

Si en el dibujo no se puede establecer directamente la posición recíproca de la recta y el plano, se recurre a ciertas construcciones auxiliares, como resultado de las cuales del problema sobre la posición recíproca de la recta y el plano se pasa al problema sobre la posición recíproca de la recta dada y cierta recta auxiliar. Para esto (fig. 158) se traza por la recta dada AB un plano auxiliar S y se examina la posición recíproca de la recta MN de intersección de los planos P y S y la recta AB.

En este caso son posibles tres posiciones:

---

[1] Evidentemente, para tal orden en la disposición de las trazas paralelas al eje x: R_v, Q_v, R_h, Q_h, los planos no pueden ser paralelos y no es necesario construir las trazas R_w y Q_w.

1) La recta MN se confunde con la recta AB; esto corresponde a que la recta AB pertenece al plano P.

2) La recta MN interseca a la recta AB; esto corresponde a que la recta AB interseca al plano P.

3) La recta MN es paralela a la recta AB; esto corresponde a que la recta AB es paralela al plano P.

Así pues, *el procedimiento indicado de determinación de la posición recíproca de una recta y un plano consiste en lo siguiente*:

1) *por la recta dada se traza un plano auxiliar y se construye la línea de intersección de este plano con el plano dado*;

2) *se establece la posición recíproca de la recta dada y la línea de intersección de los planos; la posición hallada define la posición recíproca de la recta y el plano dados.*

Para resolver el problema sobre la posición recíproca de un plano y una recta hemos empleado el *método de planos auxiliares*, usado frecuentemente en las construcciones relacionadas con la posición recíproca de distintas superficies y de líneas y superficies.

La elección de los planos auxiliares ordinariamente se realiza teniendo en cuenta que las construcciones sean lo más simples posible. Puede ocurrir, por ejemplo, que los planos horizontales, frontales, proyectantes horizontales y proyectantes frontales, en general, bastante cómodos como planos auxiliares, no puedan ser empleados por completo o su empleo haga más complicadas las construcciones incluso en comparación con los planos de posición general, tomados en calidad de auxiliares. Al resolver uno u otro problema con ayuda de planos auxiliares, es necesario elegir estos planos de modo que las construcciones que surgen en este caso sean, en lo posible, lo más simples, y que la cantidad de estas construcciones sea cuanto menos.

§ 23. INTERSECCIÓN DE UNA LÍNEA RECTA CON UN PLANO PERPENDICULAR A UNO O A DOS PLANOS DE PROYECCIÓN

El plano perpendicular al plano de proyección se proyecta sobre este plano en forma de una recta. Sobre esta recta (la proyección del plano) debe encontrarse la proyección correspondiente del punto en el que una recta corta a este plano[1].

En la fig. 159 la proyección frontal k' del punto de intersección de la recta AB con el triángulo CDE queda determinada en la intersección de las proyecciones $a'b'$ y $c'e'$, puesto que el triángulo se proyecta sobre el plano V en forma de recta. Hallando el punto k' determinamos la posición de la proyección k. Puesto que la recta AB

---

[1] Al punto de intersección de una recta con un plano también se le llama *punto de colisión* de la recta con el plano.

en la dirección de K a B se encuentra bajo el triángulo, en el dibujo una parte de la proyección horizontal de la recta se ha trazado con línea de trazos.

En la fig. 160 la traza frontal del plano T es su proyección frontal. La proyección k' queda determinada en la intersección de la proyección $a'b'$ con la traza T_v.

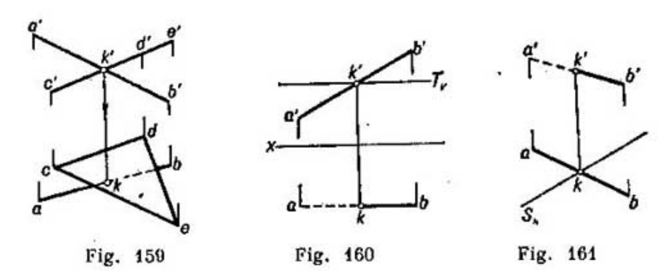


Fig. 159 Fig. 160 Fig. 161

En la fig. 161 se da un ejemplo de la construcción de las proyecciones del punto de intersección de una recta con un plano proyectante horizontal.

Para mayor evidencia, unos representan las proyecciones de los segmentos de una recta que corta al plano con líneas plenas, y otros con líneas de trazos, guiándose por los razonamientos siguientes.

1. Se considera convencionalmente que el plano dado es intransparente, y los puntos y líneas que se encuentran aunque sea en el primer cuadrante, pero situados para el observador tras el plano, estarán *ocultos*; serán *vistos* los puntos y líneas situados a un mismo lado del plano con el observador, que, como consideraremos, se encuentra en el primer octante infinitamente alejado del correspondiente plano de proyección.

2. Los segmentos vistos se dibujan con líneas plenas, y los ocultos, con líneas de trazos.

3. Al intersecarse una recta con un plano, parte de esta recta está para el observador oculta; el punto de intersección de la recta con el plano sirve de frontera de visibilidad de la línea.

4. El problema sobre la visibilidad de la línea siempre se puede reducir al problema de visibilidad de los puntos. En este caso, no solamente el plano puede tapar a un punto, sino un punto puede tapar a otro (véase la fig. 87, pág. 49).

5. *Si unos cuantos puntos están situados en una recta proyectante común para ellos, solamente uno de estos puntos será visible*:

a) respecto del plano H, el punto más alejado de H;

b) respecto del plano V, el punto más alejado de V;

c) respecto del plano W, el punto más alejado de W.

6. Si el dibujo tiene ejes de proyección, para la determinación de la visibilidad de los puntos situados en una recta proyectante común para ellos, sirven las distancias de sus correspondientes proyecciones hasta el eje de proyección:

a) respecto al plano H es visible el punto cuya proyección frontal se encuentra más lejos del eje x;

b) respecto al plano V es visible el punto cuya proyección horizontal se encuentra más lejos del eje x;

c) respecto al plano W es visible el punto cuya proyección horizontal se encuentra más lejos del eje y.

¿Cómo hay que proceder en el caso cuando el dibujo no tiene ejes de proyección? Examinemos la fig. 162. Los puntos 1 y 2 de dos rectas que se cruzan están situados en una recta proyectante común para ellos, perpendicular al plano V, y los puntos 3 y 4, sobre una recta proyectante perpendicular al plano H.

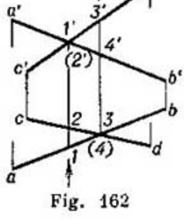


Fig. 162

El punto de intersección de las proyecciones horizontales de las rectas dadas representa las proyecciones confundidas de dos puntos, uno de los cuales, el punto 4, pertenece a la recta AB, y el otro, el punto 3, a la recta CD. Puesto que $3'3 > 4'4$, respecto al plano H será visible el punto 3 perteneciente a la recta CD, y el punto 4 está tapado por el punto 3.

Del mismo modo el punto de intersección de las proyecciones frontales de las rectas AB y CD representa las proyecciones confundidas de dos puntos 1 y 2, de los cuales el punto 1 pertenece a la recta AB, y el 2, a la recta CD. Puesto que $11' > 22'$, respecto al plano V es visible el punto 1, que tapa al punto 2.

Este es el procedimiento general: así se puede proceder también en los dibujos con ejes de proyección.

§ 24. CONSTRUCCIÓN DE LA LÍNEA DE INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS

La línea recta obtenida como resultado de la intersección de dos planos queda determinada por completo por dos puntos, cada uno de los cuales pertenece a ambos planos. Así, por ejemplo, la recta K_1K_2 (fig. 163), según la cual se intersecan el plano dado por el triángulo ABC y el plano Q dado por las rectas DE y DF, pasa por los puntos K_1 y K_2; pero, en estos puntos las rectas AB y AC del primer plano cortan al plano Q, es decir, los puntos K_1 y K_2 pertenecen a ambos planos.

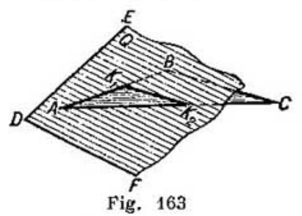


Fig. 163

Por consiguiente, *en el caso general, para la construcción de la línea de intersección de dos planos hay que hallar dos puntos cualesquiera, cada uno de los cuales pertenece a ambos planos; estos puntos determinan la línea de intersección de los planos.*

Para hallar cada uno de tales dos puntos corrientemente hay que cumplir construcciones especiales. Pero, si por lo menos uno de los planos que se cortan es perpendicular al plano de proyección, la construcción de las proyecciones de la línea de intersección se simplifica. Empecemos con este caso.

En la fig. 164 se muestra la intersección de dos planos, uno de los cuales (el dado por el triángulo EF) está situado perpendicularmente al plano V. Puesto que el triangulo DEF se proyecta sobre el plano V en forma de una línea recta ($d'f'$), la proyección frontal del segmento, según el cual se cortan ambos triángulos, representa el segmento $k_1'k_2'$ sobre la proyección $d'f'$. La construcción ulterior está clara del dibujo.

Otro ejemplo se da en la fig. 165. El plano proyectante horizontal S corta al plano del triángulo ABC. La proyección horizontal de la

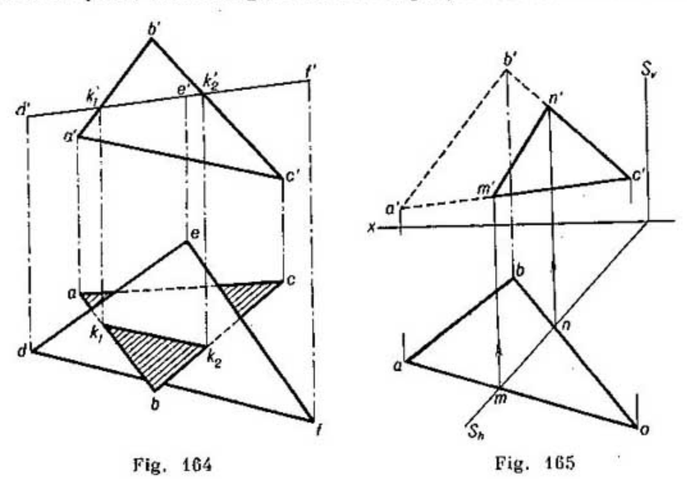


Fig. 164 Fig. 165

línea de intersección de estos planos, el segmento mn, se determina en la traza S_h.

Ahora examinemos *el caso general de construcción de la línea de intersección de dos planos.* Supongamos que uno de los planos, el P, esté dado por dos rectas que se cortan, y el otro, el Q, por dos, rectas paralelas. La construcción se muestra en la fig. 166. Como resultado de la intersección de los planos P y Q se ha obtenido la recta K_1K_2. Expresemos esto con la escritura: $P\times Q=K_1K_2$.

Para determinar la posición de los puntos K_1 y K_2 tomamos dos planos proyectantes frontales auxiliares (T_1 y T_2) que cortan a cada uno de los planos P y Q. Como resultado de la intersección del plano T_1 con los planos P y Q obtenemos las rectas con las proyecciones $1'2'$, $1—2$ y $3'4'$, $3—4$. Estas rectas, situadas en el plano T_1, en su intersección determinan el primer punto, el K_1, de la línea de intersección de los planos P y Q.

Introduciendo, a continuación, el plano T_2, en su intersección con P y Q obtenemos las rectas con las proyecciones $5'6'$, $5-6$ y $7'8'$, $7-8$. Estas rectas, situadas en el plano T_2, en su intersección determinan el segundo punto, el K_2, común para P y Q.

Una vez obtenidas las proyecciones k_1 y k_2 hallamos sobre las trazas T_{1v} y T_{2v} las proyecciones k'_1 y k'_2. Con esto quedan determinadas las proyecciones k_1k_2 y $k'_1k'_2$ de la recta de intersección de los planos P y Q buscada (las proyecciones se han trazado con líneas de puntos y rayas).

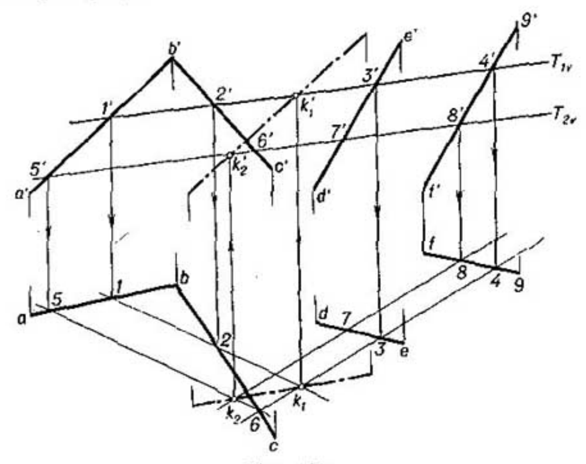


Fig. 166

Al efectuar la construcción se puede tener en cuenta lo siguiente: puesto que los planos secantes auxiliares T_1 y T_2 son paralelos entre sí, entonces, una vez construidas las proyecciones $1-2$ y $3-4$, para las proyeccio es $5-6$ y $7-8$ debe tomarse un solo punto para cada una, por ejemplo, el 5 y el 8, ya que $5-6 \| 1-2$ y $7-8 \| 3-4$.

En la construcción examinada, en calidad de planos auxiliares se tomaron dos planos proyectantes frontales. Claro está, se podría haber tomado otros planos, por ejemplo, dos planos horizontales o uno horizontal y otro frontal, etc. La esencia de la construcción en este caso no varía. Sin embargo, tal caso puede encontrarse. Supongamos que en calidad de auxiliares fueron tomados dos planos horizontales y en la intersección de éstos con los planos P y Q se obtuvieron horizontales paralelas entre sí. Pero, en la fig. 167 se ve que, a pesar de que sus horizontales son paralelas, los planos P y Q se cortan. Por consiguiente, si las proyecciones horizontales de las horizontales AB y CD se han obtenido paralelas, sabiendo que los planos en este caso pueden tanto ser paralelos como cortarse (por la horizontal común a éstos), los planos P y Q deben ser exa-

minados auxiliándose, por ejemplo, de un plano proyectante horizontal (véase la fig. 167): si las rectas según las cuales este plano auxiliar S corta a los planos P y Q fueran también paralelas entre sí, esto significaría que los planos P y Q no se cortan, sino que son paralelos entre sí. En la fig. 167 estas rectas se cortan en el punto K, por el cual pasa precisamente la línea de intersección de los planos P y Q paralelamente a las rectas BA y CD.

Si los planos están dados por sus trazas en los planos de proyección, es natural buscar los puntos que determinan la recta de intersección de los planos, en los puntos de intersección de las trazas homónimas

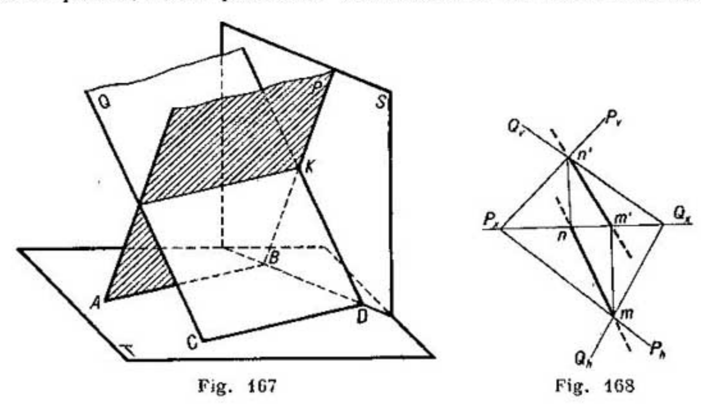


Fig. 167 Fig. 168

de los planos (fig. 168): *la recta que pasa por estos puntos es común para ambos planos, es decir, es su línea de intersección.*

El esquema de la construcción de la línea de intersección de dos planos (véase la fig. 166) puede, claro está, difundirse para el caso cuando los planos están dados por sus trazas. Aquí el papel de planos secantes auxiliares lo cumplen los propios planos de proyección:

$$P\times H=P_h;\quad Q\times H=Q_h;\quad P_h\times Q_h=M;$$
$$P\times V=P_v;\quad Q\times V=Q_v;\quad P_v\times Q_v=N.$$

Los puntos de interseccion de las trazas homónimas de los planos son las trazas de la línea de intersección de estos planos. Por esta razón, para construir las proyecciones de la línea de intersección de los planos P y Q (fig. 168) es necesario: 1) hallar el punto m en la intersección de las trazas P_h y Q_h y el punto n' en la intersección de P_v y Q_v, y por ellos hallar las proyecciones m' y n; 2) trazar las rectas $m'n'$ y mn.

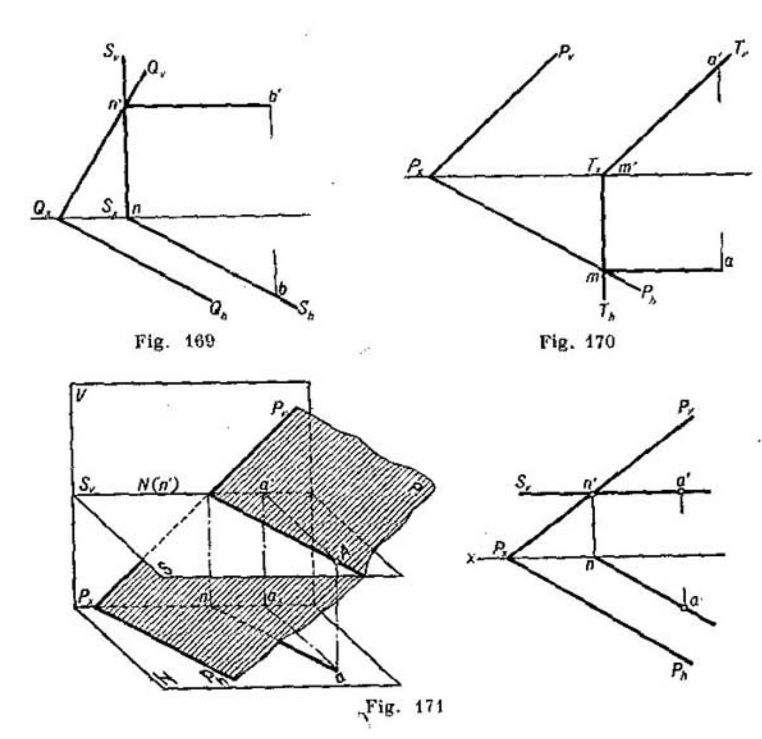


Fig. 169

Fig. 170

Fig. 171

En las figs. 169—171 se muestran los casos cuando se conoce la dirección de la línea de intersección. Por eso, es suficiente tener solamente un punto de la intersección de las trazas y luego trazar por este punto una recta partiendo de la posición de los planos y sus trazas.

PREGUNTAS A LOS §§ 22—24

1. ¿Qué posición recíproca pueden ocupar dos planos?
2. ¿Cuál es el índice de paralelismo de dos planos?
3. ¿Cómo se sitúan una respecto a la otra las trazas frontales de dos planos proyectantes frontales paralelos entre sí?
4. ¿Cómo se sitúan una respecto a la otra las trazas horizontales de dos planos proyectantes horizontales paralelos entre sí?
5. ¿Cómo se sitúan una respecto a *la otra las trazas homónimas de dos* planos paralelos entre sí?

6. ¿Sirve de índice de intersección mutua de dos planos la intersección de aunque sea dos de sus trazas homónimas?

7. ¿Cómo establecer la posición recíproca de una recta y un plano?

8. ¿Cómo se construye el punto de intersección de una recta con un plano perpendicular a uno o dos planos de proyección?

9. ¿Cuál de los puntos situados sobre la perpendicular común al a) plano H, b) plano V se considera visible en los planos H y V respectivamente?

10. ¿Cómo se construye la línea de intersección de dos planos, uno de los cuales, por lo menos, es perpendicular al plano H o al plano V?

11. ¿En qué consiste el procedimiento general de construcción de la línea de intersección de dos planos?

§ 25. INTERSECCIÓN DE UNA LÍNEA RECTA CON UN PLANO DE POSICIÓN GENERAL

Para construir el punto de intersección de una recta con un plano de posición general es necesario cumplir lo siguiente (fig. 158):

1) *trazar por la recta dada* (AB) *cierto plano auxiliar* (S);

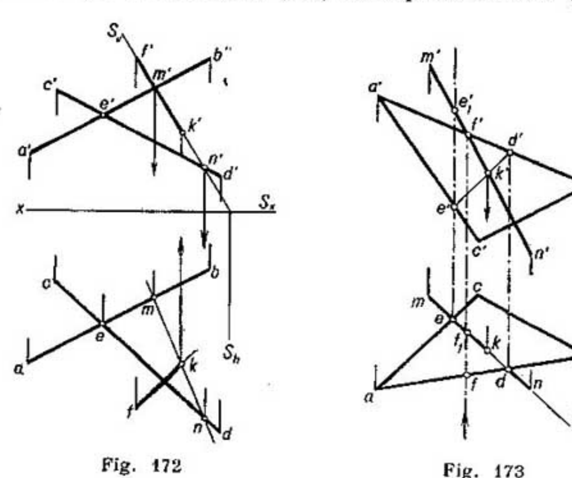


Fig. 172 Fig. 173

2) *construir la recta* (MN) *de intersección de los planos dado* (P) *y auxiliar* (S);

3) *determinar la posición del punto* (K) *de intersección de las rectas dada* (AB) *y la construida* (MN).

En la fig. 172 se muestra la construcción del punto de intersección de la recta FK con el plano de posición general dado por dos rectas que se cortan AB y CD.

Por la recta FK se ha trazado el plano proyectante frontal auxiliar S. La elección del plano proyectante frontal se explica por la comodidad de la construcción de los puntos de intersección de su traza frontal con las proyecciones $a'b'$ y $c'd'$. Por los puntos m' y n' se han hallado las proyecciones horizontales m y n, con lo cual ha quedado determinada la recta MN según la cual el plano auxiliar S corta al plano dado P. Luego se ha hallado el punto k en el cual la proyección horizontal de la recta corta, directamente o al ser prolongada, a la proyección mn. Después de esto queda hallar la proyección frontal del punto de intersección (del punto k').

En la fig. 173 se muestra la construcción del punto de intersección de la recta MN con el plano dado por el triángulo ABC. La marcha de la construcción no se diferencia en nada de la examinada en la fig. 172. Pero, el plano auxiliar (ahora el plano proyectante horizontal) en este caso está señalado solamente por su traza T_h que pasa por la proyección mn. El plano T corta al triángulo ABC según la recta DE. Pero, podemos prescindir de la traza T_h: imaginándonos mentalmente que el plano proyectante horizontal auxiliar pasa por la recta MN, expresamos el segmento ED, según el cual el plano proyectante horizontal trazado por MN corta al triángulo, por sus proyecciones ed y $e'd'$.

Considerando que en el espacio están dados una recta y un triángulo intransparente, hallamos las partes vistas y ocultas de la recta MN respecto a los planos H y V.

En el punto e del plano H se confunden las proyecciones horizontales de dos puntos, uno de los cuales pertenece a la recta MN (la proyección frontal e_1') y el otro, al lado del triángulo AC (la proyección frontal e').

De la disposición de las proyecciones frontales e_1' y e' se deriva que en el tramo KM la recta se encuentra sobre el triángulo y, por consiguiente, en la proyección horizontal, todo el segmento mk es visible, y el segmento kd está oculto.

En la proyección frontal, en el punto f' se confunden las proyecciones frontales de dos puntos, uno de los cuales pertenece a la recta MN, y el otro, al lado AB del triángulo. Según la disposición de las proyecciones horizontales f y f_1 deducimos que la recta MN, en el tramo MK, se encuentra tras el triángulo y, por consiguiente, en la proyección frontal el segmento $f'k'$ está oculto, y el segmento $k'n'$ es visible.

En las figs. 174—176 se dan unos ejemplos de la construcción del punto de intersección de una recta con el plano de posición general expresado por sus trazas. En el primer ejemplo, por la recta AB se ha trazado el plano proyectante horizontal S, y en el segundo (fig. 175), un plano horizontal, lo cual ha sido posible efectuar por ser en este ejemplo la recta AB horizontal.

La recta representada en la fig. 176 es perpendicular al plano H. Las proyecciones horizontales de todos los puntos de esta recta se confunden en un punto.

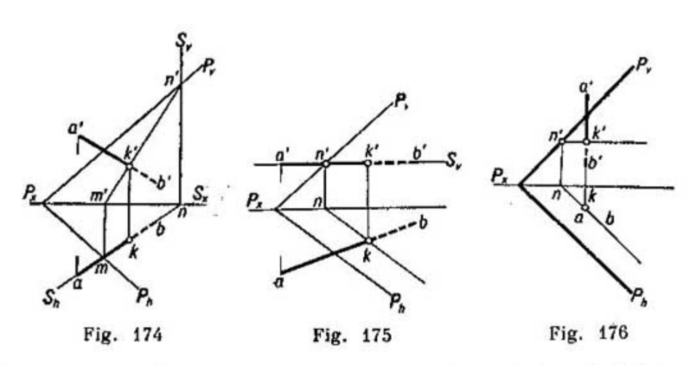


Fig. 174 Fig. 175 Fig. 176

Por consiguiente, la posición de la proyección k del punto buscado de intersección de la recta AB con el plano P es conocida. La posición de la proyección k' se ha determinado con ayuda de la horizontal.

§ 26. CONSTRUCCIÓN DE LA LÍNEA DE INTERSECCIÓN DE DOS PLANOS POR LOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN DE LAS LÍNEAS RECTAS CON EL PLANO

En el § 24 se expuso el procedimiento general de construcción de la línea de intersección de dos planos, a saber: el empleo de planos secantes auxiliares (véase la fig. 166). Examinemos ahora otro procedimiento de construcción aplicado a los planos de posición general. *Este procedimiento consiste en que se hallan los puntos de intersección de dos rectas, pertenecientes a uno de los planos, con el otro plano.* Por tanto, hay que saber construir el punto de intersección de una recta con el plano de posición general, lo cual fue expuesto en el § 25.

En la fig. 177 se muestra la intersección del triángulo ABC por un plano dado por dos rectas paralelas ($DE \| FG$). La construcción se redujo a la construcción de los puntos K_1 y K_2 en los que las rectas DE y FG cortan al plano del triángulo, y a trazar por estos puntos el segmento de una recta. Imaginándonos que por DE y FG se han trazado planos proyectantes frontales, hallamos las rectas paralelas según las cuales estos planos cortan al triángulo. Una de ellas está expresada por las proyecciones $1—2$ y $1'2'$; para la otra se muestra un punto $3'$, 3, por la proyección horizontal del cual se ha trazado una recta paralelamente a la proyección $1—2$.

Una vez determinada la posición de las proyecciones k_1 y k_2, hallamos las proyecciones k'_1 y k'_2 y la proyección del segmento k_1k_2.

Claro está, que también en el caso examinado es aplicable el método general (véase la fig. 166), pero hubiéramos tenido que trazar más líneas que en la fig. 177. En la fig. 178 se da la construcción de la línea de intersección de dos triángulos *ABC* y ***DEF***, señalando las partes vistas y ocultas de estos triángulos.

La recta K_1K_2 ha sido construida por los puntos de intersección de los lados *AC* y *BC* del triángulo *ABC* con el plano del triángulo *DEF*. El plano proyectante frontal auxiliar trazado por *AC* (en el dibujo esto plano no se denota especialmente) corta al triángulo

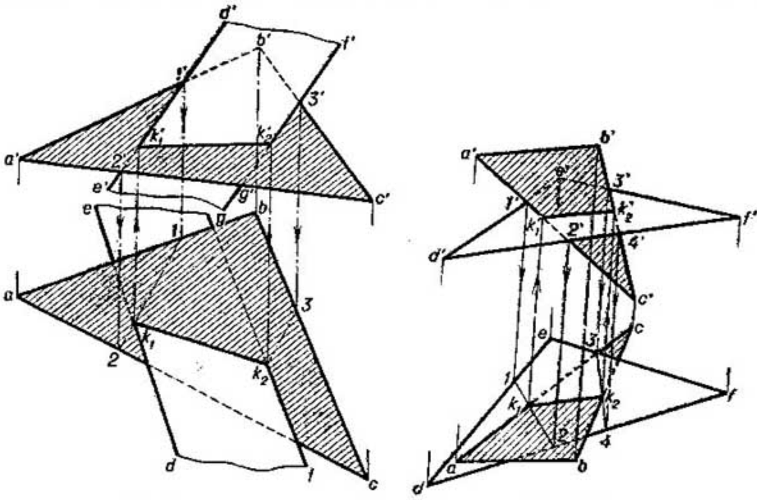


Fig. 177 Fig. 178

DEF según la recta con proyecciones *1'2'* y *1—2*; en la intersección de las proyecciones *ac* y *1—2* se ha obtenido la proyección horizontal del punto K_1 de intersección de la recta *AC* con el triángulo *DEF*, a continuación se ha construido la proyección frontal k_1'. De la misma manera se ha hallado el punto K_2.

En los ejemplos de las figs. 177 y 178 nos hemos encontrado con el problema de división de las figuras planas en partes vistas y ocultas para el observador, ya que los planos se consideran intransparentes. En los dibujos esto se muestra rayando las partes correspondientes de los triángulos *ABC*. La visibilidad se ha determinado a base de los mismos razonamientos que en el ejemplo examinado en la fig. 173.

En la fig. 179 se expone un ejemplo más de la construcción de la línea de intersección de dos triángulos. En el caso dado, por la

misma razón se puede considerar que el triángulo ABC entra en el corte del triángulo DEF o que el triángulo DEF entra en el corte del triángulo ABC; solamente hay que convenir en cuál de los triángulos considerar este corte por la recta K_1K_2. En cambio, en el caso expuesto en la fig. 178, el corte se encuentra sólo en el triángulo DEF y el triángulo ABC entra en él.

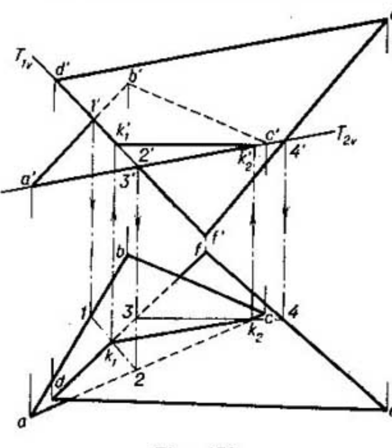


Fig. 179

La propia construcción en la fig. 179 se reduce a hallar los puntos K_1 y K_2 con ayuda de los planos proyectantes frontales P_1 y P_2.

Hay que prestar atención una vez más a que el empleo de líneas de trazos en vez de plenas, por ejemplo, en las figs. 159, 161, 164, 165, 173—179, está dictado por el deseo de hacer las representaciones más demostrativas. Si se partiera de la noción de proyección como imagen geométrica, la cuestión sobre «transparencia» u «opacidad», sobre «visibilidad» e «invisibilidad» desaparecería: todo se debería representar con líneas plenas. Pero para dar a los dibujos mayor claridad se han introducido ciertas condicionalidades, entre ellas las líneas de trazos.

PREGUNTAS A LOS §§ 25 Y 26

1. ¿En qué consiste, en el caso general, el método de construcción del punto de intersección de una recta con un plano?

2. ¿Qué operaciones y en qué sucesión hay que cumplir para la construcción de este punto (véase la pregunta 1)?

3. ¿Cómo determinar la «visibilidad» al intersecarse una recta con un plano?

4. ¿Cómo se puede construir la recta de intersección de dos planos, si no se emplea el método general expuesto en el § 24?

5. ¿Cómo determinar la «visibilidad» en el caso de intersección mutua de dos planos?

6. ¿En qué se diferencian los casos examinados en las figs. 178 y 179?

§ 27. CONSTRUCCION DE UNA LINEA RECTA Y UN PLANO PARALELOS ENTRE SI

La construcción de *una recta paralela a un plano dado*, se basa en la siguiente tesis conocida por la Geometría: *una recta es paralela a un plano, si esta recta es paralela a una recta cualquiera de dicho plano.*

Por un punto dado en el espacio se pueden trazar infinitas rectas paralelas al plano dado. Para obtener una solución única se necesitan algunas condiciones complementarias. Por ejemplo, por el punto *M* (fig. 180) se exige trazar una recta paralela al plano dado por el triángulo *ABC*, y al plano de proyección *H* (condición complementaria).

Evidentemente, la recta buscada deberá ser paralela a la línea de intersección de ambos planos, es decir, deberá ser paralela a la traza horizontal del plano dado por el triángulo *ABC*. Para terminar la dirección de esta traza se puede hacer uso de la horizontal del plano dado por el triángulo *ABC*. En la fig. 180 se ha trazado la horizontal *DC* y luego, por el punto *M*, se ha trazado una recta paralela a esta horizontal.

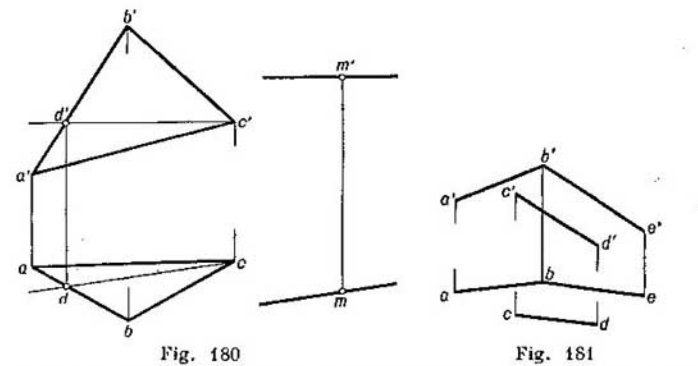


Fig. 180 Fig. 181

Planteemos el problema inverso: *por un punto dado trazar un plano paralelo a una recta dada.* Los planos que pasan por cierto punto *A* paralelamente a cierta recta *BC*, forman un haz de planos cuyo eje es una recta que pasa por el punto *A* paralelamente a la recta *BC*. Para obtener una solución única se necesita una condición complementaria.

Por ejemplo, hay que trazar un plano, paralelo a la recta *CD*, no por un punto, sino por la recta *AB* (fig. 181). Las rectas *AB* y *CD* se cruzan. Si por una de dos rectas que se cruzan se exige trazar un plano paralelo a la otra, el problema tiene una sola solución. Por el punto *B* se ha trazado una recta paralela a la recta *CD*; las rectas *AB* y *BE* determinan el plano paralelo a la recta *CD*.

¿Cómo establecer si es paralela, o no, la recta dada al plano dado?

Se puede intentar trazar sobre este plano una recta paralela a la recta dada. Si no se logra trazar tal recta en el plano, entonces, la recta y el plano dados no son paralelos entre sí.

Se puede hacer la prueba de hallar también el punto de intersección de la recta dada con el plano dado. Si tal punto no puede ser hallado, la recta y el plano dados son paralelos entre sí.

§ 28. CONSTRUCCION DE PLANOS RECIPROCAMENTE PARALELOS

Supongamos que se da el punto K por el que hay que trazar un plano paralelo a cierto plano dado por las rectas que se cortan AF y BF (fig. 182).

Es evidente, que si por el punto K se trazan las rectas CK y DK, paralelas respectivamente a las rectas AF y BF, entonces, el plano determinado por las rectas CK y DK será paralelo al plano dado.

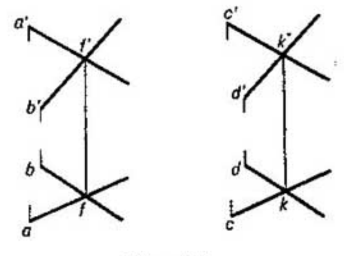
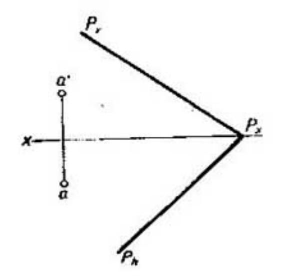


Fig. 182

Otro ejemplo de construcción se da en la fig. 183, a la derecha. Por el punto A se ha trazado el plano Q paralelamente al plano P. Primeramente por el punto A se ha trazado una recta notoriamente paralela al plano P. Esta recta es la horizontal con las proyecciones $a'n'$ y an, además, $an \| P_h$. Por ser el punto N la traza frontal de la horizontal AN, por él pasará la traza $Q_v \| P_v$, y por Q_x, la treza $Q_h \| P_h$. Los planos Q y P son paralelos entre sí, por ser paralalas entre sí sus trazas homónimas que se cortan.

En la fig. 184 se representan dos planos paralelos entre sí, uno de los cuales está dado por el triángulo ABC, y el otro, por las rectas



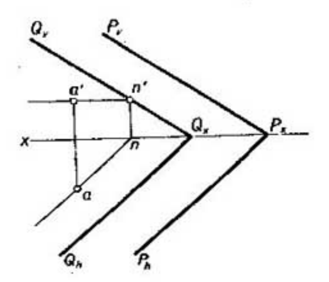


Fig. 183

paralelas *DE* y *FG*. ¿Por qué se establece el paralelismo de estos planos? Por el hecho de que en el plano dado por las rectas *DE* y *FG* ha sido posible trazar dos rectas que se cortan *KM* y *KN* paralelas respectivamente a las rectas que se cortan *AC* y *BC* del otro plano.

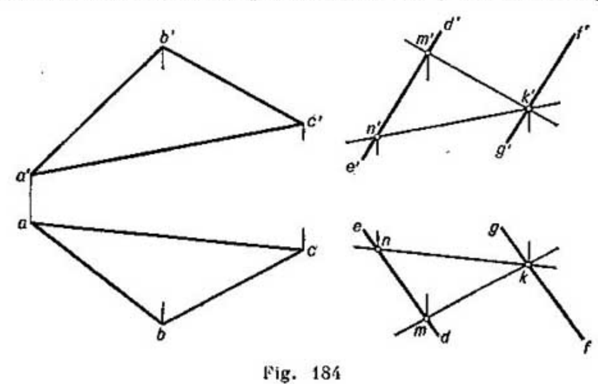


Fig. 184

Claro que se podría intentar hallar el punto de intersección de, por ejemplo, la recta *DE* con el plano del triángulo *ABC*. El fracaso confirmaría el paralelismo de los planos.

PREGUNTAS A LOS §§ 27 Y 28

1. ¿En qué se basa la construcción de una recta que debe ser paralela a cierto plano?
2. ¿Cómo trazar un plano por una recta paralelamente a la recta dada?
3. ¿Por qué se establece el paralelismo recíproco de dos planos?
4. ¿Cómo trazar por un punto un plano paralelo a otro dado?
5. ¿Cómo comprobar en el dibujo si son paralelos entre sí dos planos dados?

§ 29. CONSTRUCCION DE UNA RECTA Y UN PLANO RECIPROCAMENTE PERPENDICULARES

De todas las posiciones posibles de una recta que corta a un plano, señalemos el caso cuando la recta es perpendicular al plano y examinemos las propiedades de las proyecciones de tal recta.

En la fig. 185 se da un plano determinado por dos rectas que se cortan *AN* y *AM*, con la particularidad de que *AN* es la horizontal y *AM*, la frontal de este plano. La recta *AB*, representada en el mismo dibujo, es perpendicular a las rectas *AN* y *AM* y, por consiguiente, es perpendicular al plano que éstas determinan.

La perpendicular a un plano es perpendicular a cualquier recta trazada en este plano. Pero para que en este caso la proyección de la perpendicular al plano de posición general sea perpendicular a la proyección homónima de una recta cualquiera de este plano, dicha recta deberá ser la horizontal, la frontal o la recta de perfil del plano. Por esta razón, al desear construir la perpendicular al plano, en el caso general, se toman dos de estas rectas (por ejemplo, la horizontal y la frontal, como se muestra en la fig. 185).

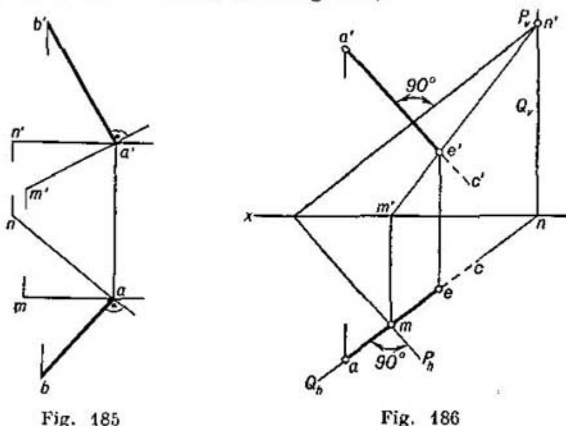


Fig. 185 Fig. 186

Así pues, *la proyección horizontal de la perpendicular a un plano es perpendicular a la proyección horizontal de la horizontal, su proyección frontal es perpendicular a la proyección frontal de la frontal y la proyección de perfil es perpendicular a la proyección de perfil de la recta de perfil de este plano.*

Es evidente, que en el caso cuando el plano está expresado por sus trazas (fig. 186), obtenemos la siguiente deducción: *si una recta es perpendicular a un plano, la proyección horizontal de esta recta es perpendicular a la traza horizontal del plano, y su proyección frontal es perpendicular a la traza frontal del plano.*

Ahora bien, si en el sistema V, H la proyección horizontal de una recta es perpendicular a la traza horizontal de un plano y la proyección frontal de dicha recta es perpendicular a la traza frontal de dicho plano, entonces, *en el caso de planos de posición general* (fig. 186) *y de planos proyectantes horizontales y frontales, la recta es perpendicular al plano.* Pero para el plano proyectante de perfil puede resultar que la recta no es perpendicular a este plano, aun siendo las proyecciones de la recta respectivamente perpendiculares a las trazas horizontal y frontal del plano. Por esta razón, en el caso de un plano proyectante de perfil, se debe examinar también la posición recíproca de la proyección de perfil de la

recta y la traza de perfil del plano dado y solamente después de esto establecer si serán perpendiculares entre sí la recta y el plano dados.

Evidentemente (fig. 187), la proyección horizontal de la perpendicular al plano se confunde con la proyección horizontal de la línea de pendiente trazada en el plano por el pie de la perpendicular.

En la fig. 186 desde el punto A se ha trazado la perpendicular al plano P ($a'c' \perp P_v$, $ac \perp P_h$) y se muestra la construcción del punto E, en el cual la perpendicular AC corta al plano P. La construcción se ha efectuado con ayuda del plano proyectante horizontal Q trazado por la perpendicular AE.

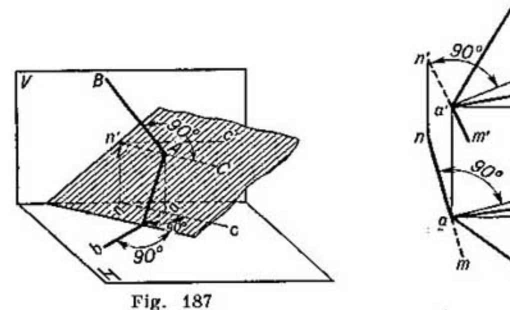


Fig. 187

Fig. 188

En la fig. 188 se muestra la construcción de la perpendicular al plano determinado por el triángulo ABC. La perpendicular se ha trazado por el punto A.

Puesto que la proyección frontal de la perpendicular al plano debe ser perpendicular a la proyección frontal de la frontal del plano, y su proyección horizontal, perpendicular a la proyección horizontal de la horizontal, en el plano, por el punto A se han trazado la frontal con las proyecciones $a'd'$ y ad y la horizontal con las proyecciones $a'e'$ y ae. Claro está, que no es obligatorio trazar estas rectas precisamente por el punto A.

Luego se han trazado las proyecciones de la perpendicular: $m'n' \perp a'd'$, $mn \perp ae$. ¿Por qué las proyecciones en la fig. 188 en las zonas $a'n'$ y am se muestran con líneas de trazos? Porque aquí se examina no sólo el triángulo ABC, sino también el plano determinado por este triángulo: parte de la perpendicular se halla delante del plano y parte detrás del mismo.

En las figs. 189 y 190 se muestra la construcción de un plano que pasa por el punto A perpendicularmente a la recta BC. En la fig. 189 el plano está expresado por sus trazas. La construcción se ha iniciado con el trazado por el punto A de la horizontal del plano buscado:

puesto que la traza horizontal del plano debe ser perpendicular a bc, también la proyección horizontal de la horizontal deberá ser perpendicular a bc. Por eso $an \perp bc$. La proyección $a'n' \parallel$al eje x, como esto debe suceder con la horizontal. Luego trazamos por el punto n' (n' es la proyección frontal de la traza frontal de la horizontal AN) la traza $P_v \perp b'c'$, se ha obtenido el punto P_x y trazado la traza $P_h \parallel an$ ($P_h \perp bc$).

En la fig. 190 el plano está determinado por su frontal AM y su horizontal AN. Estas rectas son perpendiculares a BC ($a'm' \perp b'c'$, $an \perp bc$); el plano determinado por estas rectas es perpendicular a BC.

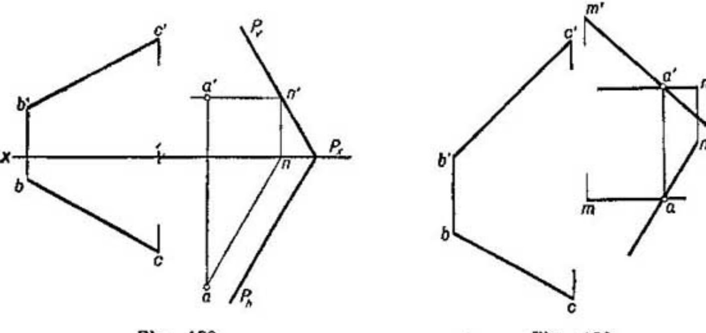


Fig. 189 Fig. 190

Dado que la perpendicular a un plano es perpendicular a cualquier recta trazada en este plano, al aprender a trazar un plano perpendicularmente a una recta, se puede hacer uso de esto para trazar una perpendicular desde cierto punto A a una recta de posición general BC. Está claro que se puede fijar el siguiente plan de construcción de las proyecciones de la recta buscada:

1) por el punto A trazar un plano (llamémoslo Q) perpendicular a BC;

2) hallar el punto K de intersección de la recta BC con el plano Q;

3) unir los puntos A y K con el segmento de una recta.

Las rectas AK y BC son perpendiculares entre sí.

Un ejemplo de construcción se da en la fig. 191. Por el punto A se ha trazado el plano (Q) perpendicular a BC. Esto se ha hecho con auxilio de la frontal cuya proyección frontal $a'f'$ se ha trazado perpendicularmente a la proyección frontal $b'c'$, y de la horizontal cuya proyección horizontal es perpendicular a bc.

Luego se ha hallado el punto K de intersección de la recta BC con el plano Q. Para ello, por la recta BC se ha trazado el plano pro-

yectante horizontal S (en el dibujo este plano está dado solamente por la traza horizontal S_h). El plano S corta al plano Q según la recta cuyas proyecciones son $1'2'$ y $1-2$. En la intersección de esta recta con la recta BC se obtiene el punto K. La recta AK es la perpendicular buscada a BC. En efecto, la recta AK corta a la recta BC y está contenida en el plano Q, perpendicular a la recta BC; por consiguiente, $AK \perp BC$.

En el § 15 se mostró (fig. 92) cómo se puede trazar una perpendicular desde un punto a una recta. Pero allí esto se realizó introduciendo un plano

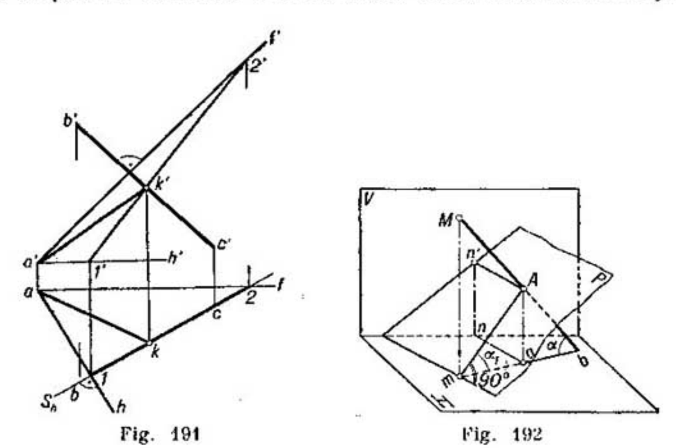


Fig. 191

Fig. 192

auxiliar en el sistema V, H y formando, de tal modo, el sistema S, H, en el que el plano S se traza paralelamente a la recta dada. Recomendamos comparar las construcciones dadas en las figs. 92 y 191.

En la fig. 192 están representados el plano de posición general P que pasa por el punto A, y la perpendicular AM a este plano, prolongada hasta su intersección con el plano H en el punto b.

El ángulo α_1 entre los planos P y H y el ángulo α formado por la recta AM con el plano H son ángulos agudos del triángulo rectángulo bAm y, por consiguiente, $\alpha_1+\alpha=90°$. De forma análoga, si el plano P forma con el plano V un ángulo β_1, y la recta AM es perpendicular a P y forma con el plano V un ángulo β, entonces, $\beta_1+\beta=90°$. De aquí, ante todo, se desprende que el plano de posición general, que deberá formar con el plano H un ángulo α_1 y con el plano V un ángulo β_1 puede ser construido solamente si $180°>\alpha_1+\beta_1>90°$.

En efecto, sumando miembro a miembro $\alpha_1+\alpha=90°$ y $\beta_1+\beta=90°$, obtenemos: $\alpha_1+\beta_1+\alpha+\beta=180°$, es decir, $\alpha_1+\beta_1<180°$, y dado que $\alpha+\beta<90°$ (véase la pág. 44), entonces, $\alpha_1+\beta_1>90°$. Si se toma $\alpha_1+\beta_1=90°$ se obtendrá un plano proyectante de perfil y si se toma $\alpha_1+\beta_1=180°$ se obtendrá un plano de perfil, es decir, en ambos casos el plano no es de posición general, sino de posición particular.

§ 30. CONSTRUCCIÓN DE PLANOS RECÍPROCAMENTE PERPENDICULARES

La construcción de un plano Q perpendicular a un plano P puede efectuarse por dos vías:

1) el plano Q se traza por una recta perpendicular al plano P;

2) el plano Q se traza perpendicularmente a una recta contenida en el plano P o paralela a este plano. Para obtener una solución única se necesitan condiciones complementarias.

En la fig. 193 se muestra la construcción de un plano perpendicular a otro representado por el triángulo CDE. La condición complementaria aquí radica en que el plano buscado debe pasar por la recta AB. Por consiguiente, el plano buscado quedará determinado por la recta AB y la perpendicular al plano del triángulo.

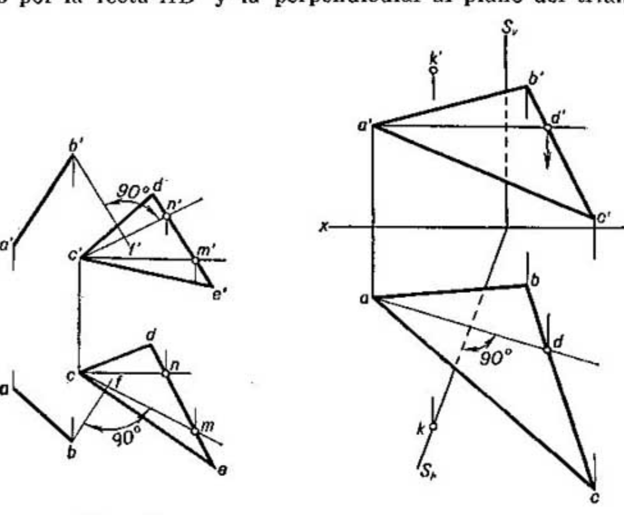


Fig. 193 Fig. 194

Para trazar esta perpendicular al plano CDE, en éste se han tomado la frontal CN y la horizontal CM: si $b'f' \perp c'n'$ y $bf \perp cm$, entonces, $BF \perp$ al plano CDE.

El plano formado por las rectas que se cortan AB y BF es perpendicular al plano CDE, por pasar por la perpendicular a este plano. En la fig. 194 el plano proyectante horizontal S pasa por el punto K perpendicularmente al plano dado por el triángulo ABC. Aquí la

condición complementaria era la perpendicularidad del plano buscado a dos planos al mismo tiempo: a los planos ABC y H. Por esta razón, como respuesta tenemos un plano proyectante horizontal. Dado que éste está trazado perpendicularmente a la horizontal AD, o sea, a una recta perteneciente al plano ABC, el plano S es perpendicular al plano ABC.

¿Puede servir la perpendicularidad de las trazas homónimas de los planos de índice de perpendicularidad de los propios planos?

A los casos evidentes, cuando esto es así, se refiere la perpendicularidad recíproca de dos planos proyectantes horizontales cuyas trazas horizontales son perpendiculares entre sí. También esto es justo para dos planos proyectantes frontales cuyas trazas frontales son perpendiculares entre sí; estos planos son perpendiculares entre sí.

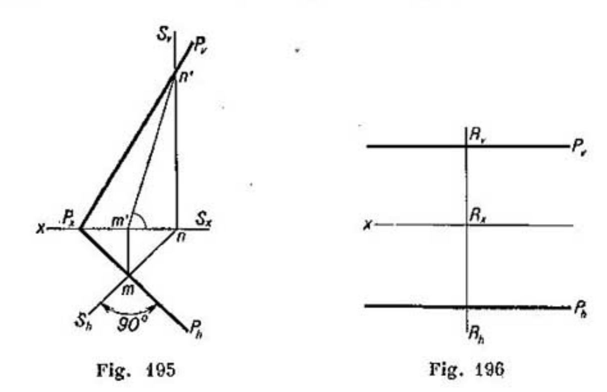


Fig. 195 Fig. 196

Examinemos (fig. 195) un plano proyectante horizontal S perpendicular a un plano de posición general P.

Si el plano S es perpendicular al plano H y al plano P, entonces, $S \perp P_h$, como a la línea de intersección de los planos P y H. De aquí que $P_h \perp S$ y, por lo tanto, $P_h \perp S_h$, como a una de las rectas pertenecientes al plano S.

Así pues, la perpendicularidad de las trazas horizontales de un plano de posición general y de un plano proyectante horizontal corresponde a la perpendicularidad recíproca de estos planos.

Evidentemente, la perpendicularidad de las trazas frontales de un plano proyectante frontal y un plano de posición general también corresponde a la perpendicularidad recíproca de estos planos.

Pero, *si las trazas homónimas de dos planos de posición general son perpendiculares entre sí, los propios planos no son recíprocamente*

perpendiculares, puesto que en este caso no se observa ninguna de las condiciones expuestas al principio de este parágrafo.

En conclusión, examinemos la fig. 196. Aquí se tiene el caso de perpendicularidad recíproca de los dos pares de trazas homónimas y la perpendicularidad de los propios planos: ambos planos son de posición particular, el plano R es de perfil y el P es un plano proyectante de perfil,

§ 31. CONSTRUCCIÓN DE LAS PROYECCIONES DEL ÁNGULO FORMADO POR UNA RECTA Y UN PLANO Y POR DOS PLANOS

Si una recta no es perpendicular a un plano, *el ángulo formado por esta recta con su proyección sobre este plano se llama ángulo entre la recta y el plano.*

Sobre los ángulos formados por una recta con los planos de proyección véase el § 13.

En la fig. 197 se representa una recta AB que corta al plano P en el punto D; el ángulo α está formado por el segmento BD de la recta dada con la proyección B_pD de este segmento sobre el plano P.

La construcción de la proyección del ángulo formado por una recta AB con cierto plano P se muestra en la fig. 198. El plano P viene dado por su horizontal (las proyecciones $p'h'$ y ph) y su frontal (las proyecciones $p'f'$ y pf).

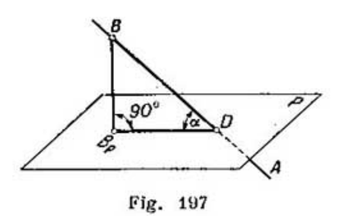


Fig. 197

Fig. 198

La construcción se ha cumplido en el siguiente orden:

a) se ha hallado el punto D de intersección de la recta AB con el plano P, para lo cual por AB se ha trazado el plano proyectante horizontal S;

b) desde el punto A se ha trazado la perpendicular al plano P;

c) se ha hallado el punto E de intersección de esta perpendicular con el plano P, para lo cual se ha trazado el plano proyectante horizontal T;

d) por los puntos d' y e', d y e se han trazado rectas, con lo cual quedan determinadas *las proyecciones de la recta AB sobre el plano P.*

El ángulo $a'd'e'$ representa la proyección frontal del ángulo entre AB y el plano P, y el ángulo ade, la proyección horizontal de este mismo ángulo.

La construcción de las proyecciones del ángulo formado por una recta con un plano se simplifica considerablemente si el plano no es de posición general, puesto que en semejantes casos el punto de intersección de la recta dada con el plano se halla sin necesidad de construcciones complementarias.

Dos planos que se cortan forman cuatro ángulos diedros. Limitándonos al examen del ángulo entre P y Q, mostrado en la fig. 199, construimos su ángulo lineal, para lo cual cortamos la arista MN del ángulo diedro con el plano S perpendicular a MN.

La construcción de las proyecciones del ángulo lineal se muestra en la fig. 200. El plano P viene dado por el triángulo AMN, el plano Q, por el triángulo BMN.

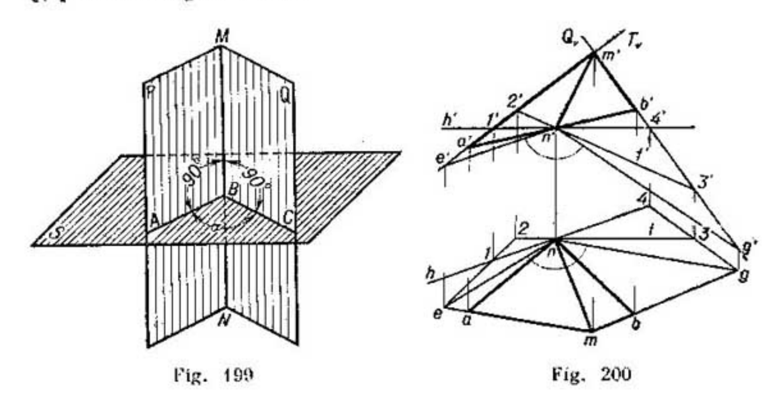


Fig. 199 Fig. 200

a) Se ha construido el plano $S \perp MN$, que pasa por el punto N (el plano S viene dado por su frontal NF y su horizontal NH);

b) se ha construido la línea de intersección de los planos P y S (la recta EN); puesto que el plano S ha sido trazado por el punto N del plano P, es necesario hallar solamente el punto E, para lo cual se ha tomado el plano auxiliar T;

c) se ha hallado la línea de intersección de los planos Q y S (la recta NG); aquí también fue necesario hallar solamente el punto G (plano auxiliar Q).

El punto N es el vértice del ángulo lineal buscado, el ángulo *eng* representa la proyección horizontal de este ángulo, y el ángulo $e'n'g'$, su proyección frontal.

En la fig. 195 están construidas las proyecciones del ángulo lineal que mide el ángulo diedro formado por el plano P con el plano de proyección H. Puesto que para obtener el ángulo lineal hay que trazar un plano perpendicular a la arista del ángulo diedro, entonces, para obtener el ángulo de inclinación del plano P al plano H se ha trazado el plano S perpendicular a la traza P_h. Análogamente, para obtener el ángulo entre el plano P y el plano V hubiera sido necesario trazar un plano perpendicularmente a la traza P_v.

En la fig. 195 la proyección frontal del ángulo buscado es el ángulo $n'm'n$, y la proyección horizontal se confunde con la traza S_h. La magnitud del ángulo puede ser determinada construyendo el triángulo rectángulo por los catetos $n'n$ y mn.

PREGUNTAS A LOS §§ 29—31

1. ¿Cómo se sitúan las proyecciones de la perpendicular a un plano?
2. ¿Cómo se disponen mutuamente las proyecciones horizontales de la perpendicular a un plano y su línea de pendiente, trazada por el punto de intersección de la perpendicular con el plano?
3. ¿Cómo trazar un plano perpendicular a una recta dada (por un punto de la recta y por un punto exterior a esta recta)?
4. ¿Cómo trazar la perpendicular desde un punto a una recta de posición general (con ayuda de un plano perpendicular a la recta, y con auxilio de la introducción en el sistema V, H de un plano de proyección auxiliar)?
5. ¿Cómo trazar dos planos recíprocamente perpendiculares?
6. ¿En cuáles casos la perpendicularidad recíproca de un par de trazas homónimas de dos planos corresponde a la perpendicularidad recíproca de los propios planos?
7. ¿En cuál caso en el sistema V, H la perpendicularidad recíproca de dos planos se expresa por la perpendicularidad recíproca de sus trazas frontales? ¿En cuál caso en el sistema V, H la perpendicularidad recíproca de dos planos se expresa por la perpendicularidad recíproca de sus trazas horizontales?
8. ¿Son perpendiculares entre sí dos planos de posición general si son perpendiculares entre sí sus trazas homónimas?
9. ¿A qué se le llama ángulo entre una recta y un plano y que operaciones hay que efectuar para la construcción en el dibujo de las proyecciones de este ángulo?
10. ¿Cuáles operaciones hay que cumplir para construir en el dibujo las proyecciones del ángulo lineal para el ángulo diedro dado?

V
CAPÍTULO

MÉTODOS DE CAMBIO DE LOS PLANOS DE PROYECCIÓN Y DE GIRO

§ 32. REDUCCIÓN DE LAS LÍNEAS RECTAS Y LAS FIGURAS PLANAS A LAS POSICIONES PARTICULARES RESPECTO A LOS PLANOS DE PROYECCIÓN

La representación de las líneas rectas y las figuras planas en sus posiciones particulares respecto de los planos de proyección (véanse los §§ 11 y 19) simplifica considerablemente la construcción y la resolución de problemas, y a veces permite obtener la respuesta o bien directamente del dibujo, o bien con auxilio de construcciones simples.

Por ejemplo, la determinación de la distancia del punto A al plano proyectante horizontal (fig. 201) dado por el triángulo BCD, se reduce al trazado de al perpendicular desde la proyección a a la proyección expresada por el segmento bd. La distancia buscada se determina por el segmento ak.

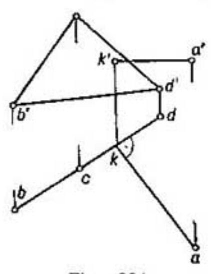


Fig. 201

Los procedimientos expuestos en el presente capítulo dan la posibilidad de pasar de las posiciones generales de las líneas rectas y las figuras planas en el sistema V, H a las posiciones particulares en el mismo sistema o en un sistema auxiliar.

Se consigue lo dicho:

1) introduciendo planos auxiliares de proyección de manera tal, que la recta o la figura plana, sin variar su posición en el espacio, resulte en una posición particular cualquiera en el nuevo sistema de planos de proyección (*método de cambio de los planos de proyección*);

2) variando la posición de la recta o la figura plana mediante su giro alrededor de cierto eje de modo que la recta o la figura resulte en una posición particular respecto del sistema de planos de proyec-

ción invariante (*método de giro y un caso particular de éste, el método de abatimiento*).

La introducción de planos de proyección auxiliares en el sistema V, H ya se examinó en el § 8, y en los §§ 13 y 15 se dieron ejemplos de construcción en los sistemas auxiliares. Ahora examinemos este procedimiento más detalladamente.

§ 33. MÉTODO DE CAMBIO DE LOS PLANOS DE PROYECCIÓN [1]

Conocimientos generales. La esencia del método de cambio de planos de proyección[2] consiste en que la posición de los puntos, líneas, figuras planas y superficies en el espacio permanecen invariables, mientras que al sistema V, H se le añaden planos auxiliares que forman con V o con H, o entre sí sistemas de dos planos perpendiculares entre sí, aceptados como planos de proyección.

Cada nuevo sistema se elige de manera tal, que se obtenga la posición más adecuada para efectuar las construcciones necesarias.

En una serie de casos, para obtener el sistema de planos de proyección que resuelva el problema, es suficiente introducir un solo plano, por ejemplo, $S \perp H$ o $T \perp V$; en este caso el plano S será un plano proyectante horizontal y el plano T, un plano proyectante frontal. Si la introducción de un solo plano, S o T, no permite resolver el problema, se recurre a completar sucesivamente el sistema primitivo de planos de proyección con nuevos: por ejemplo, se introduce el plano $S \perp H$, obteniéndose el primer sistema nuevo S, H, y a continuación, de este sistema se pasa al segundo sistema nuevo, introduciendo cierto plano $T \perp S$. En este caso, el plano T será un plano de posición general en el sistema básico V, H. De esta manera se realiza el paso consecutivo del sistema V, H al sistema S, T pasando por el sistema intermedio S, H.

Si los planos S y T no resuelven totalmente el problema, se puede pasar a un tercer sistema nuevo, introduciendo un plano más perpendicular al T.

Al efectuar las construcciones en el nuevo sistema de planos de proyección se observan las mismas condiciones respecto a la posición del observador, establecidas para el sistema de planos V, H (véase el § 7).

---

[1] Empleamos la denominación difundida de «cambio de planos de proyección», pero en realidad los planos de proyección V y H se conservan, y solamente se introducen planos auxiliares de proyección.

[2] En el idioma ruso, el método de cambio de los planos de proyección se expuso por primera vez por I. I. Sómov en su libro «Geometría descriptiva», en 1862. Luego este problema fue aclarado más detallada y profundamente en las obras de N. I. Makárov y V. I. Kurdiúmov.

El eje de proyección (la línea de tierra) lo anotaremos en la escritura en forma de quebrado, considerando que la línea del quebrado se encuentra en dicho eje; la denotación de los planos representan el numerador y denominador del quebrado, con la particularidad de que cada letra se coloca hacia el lado del eje en el que deberán situarse las proyecciones respectivas.

Introducción en el sistema *V*, *H* de un plano auxiliar de proyección. En la mayoría de los casos el plano auxiliar, introducido en el sistema *V*, *H* en calidad de plano de proyección, se elige de acuerdo con alguna condición que responde a la finalidad de la construcción. Como ejemplo puede servir el plano *S* representado en la fig. 77: puesto que se exigía hallar la magnitud verdadera del segmento *AB* y el ángulo formado por *AB* con el plano *H*, el plano *S* fue situado perpendicularmente al plano *H* (se formó el sistema *S*, *H*) y paralelamente al segmento *AB*.

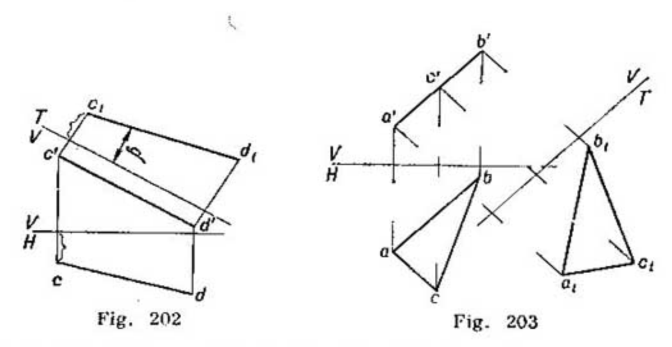


Fig. 202 Fig. 203

En la fig. 202 también la elección del plano *T* está subordinada a la finalidad de determinar el ángulo formado por la recta *CD* con el plano de proyección *V*. Por eso $T \perp V$ y al mismo tiempo el plano *T* es paralelo a la recta *CD* (el eje $T/V \parallel c'd'$). Además del ángulo buscado β, se ha hallado la magnitud verdadera del segmento *CD* (ésta viene expresada por la proyección c_1d_1).

En el caso representado en la fig. 203, la elección del plano *T* depende completamente de la tarea: determinar la forma verdadera del triángulo *ABC*. Puesto que en el caso en cuestión el plano determinado por el triángulo es perpendicular al plano *V*, para representarlo sin deformaciones hay que introducir en el sistema *V*, *H* un plano auxiliar que responda a dos condiciones: $T \perp V$ (para formar el sistema *V*, *T*) y $T \parallel ABC$ (lo que da la posibilidad de representar al $\triangle ABC$ sin desfiguraciones). El nuevo eje V/T ha sido trazado paralelamente a la proyección $a'c'b'$. Para construir la proyección $a_1b_1c_1$ a partir del nuevo eje se han trazado segmentos iguales a las distancias de los puntos *a*, *b* y *c* al eje V/H. La forma verdadera del $\triangle ABC$ se expresa por su nueva proyección $a_1b_1c_1$.

Un ejemplo de construcción en la que la elección del plano auxiliar Q no se ha precisado y puede ser cualquier plano proyectante horizontal, frontal o de perfil, con tal de que sea cómodo construir sobre él las proyecciones, sirve la fig. 204. La finalidad de la construcción es obtener las proyecciones del punto de intersección de dos rectas de perfil AB y CD pertenecientes a un mismo plano de perfil[1]. En la fig, 204 se muestra un plano proyectante horizontal Q en calidad de plano de proyección auxilar.

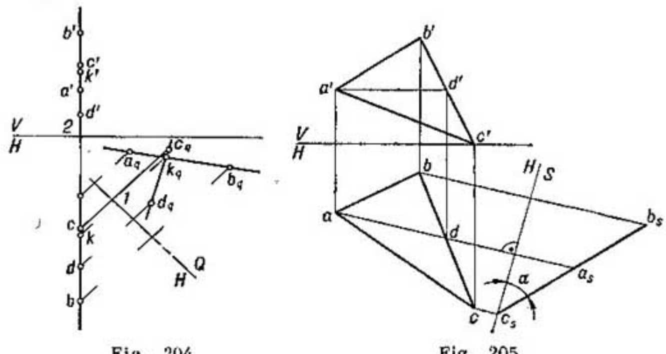


Fig. 204 Fig. 205

La posición mutua de las nuevas proyecciones a_qb_q y c_qd_q determina la posición recíproca de las rectas dadas: en este caso, las rectas se cortan. La proyección del punto de intersección sobre el plano Q es el punto k_q; por esta proyección se hallan las proyecciones k y k'.

La introducción de un plano auxiliar de proyección da la posibilidad, por ejemplo, de transformar el dibujo de manera tal, que el plano de posición general, dado en el sistema V, H, resulta perpendicular al plano auxiliar de proyección. Un ejemplo se da en la fig. 205, donde el plano complementario S se ha trazado de manera tal, que el plano de posición general, dado por el triángulo ABC, se ha hecho perpendicular al plano S. ¿Cómo se ha obtenido esto?

En el triángulo ABC se ha trazado la horizontal AD. El plano perpendicular a AD es perpendicular a ABC y al mismo tiempo al plano H (puesto que $AD \| H$). Esta condición la satisface el plano S; el triángulo ABC se proyecta sobre él en forma del segmento b_sc_s. Si el plano de posición general está dado por sus trazas (fig. 206), entonces, el plano S debe ser trazado perpendicularmente a la traza P_h, o sea, a la línea de intersección del plano P con el plano H. Con ello el plano S resulta ser perpendicular al plano H (es

---

[1] El hecho de que las rectas AB y CD se cortan se desprende de la comparación de las posiciones de los puntos A y B, C y D.

decir, aparece un plano complementario de proyección) y al plano P. Ahora hay que construir la traza del plano P sobre el plano S. Puesto que $P \perp S$, la proyección de cualquier punto del plano P sobre el plano S se encontrará sobre la recta de intersección de los planos P y S, es decir, sobre la traza P_s. En la fig. 206 como tal punto

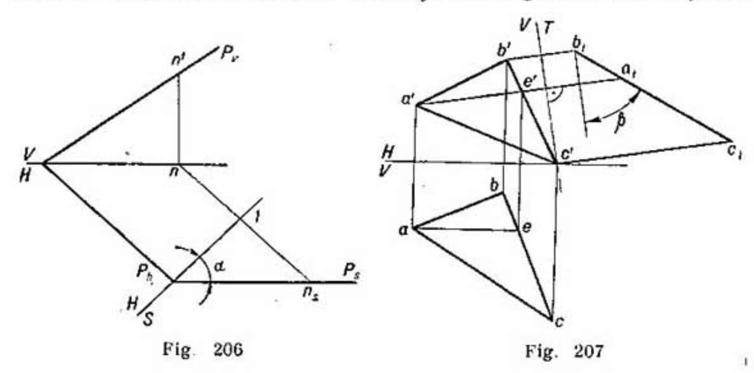


Fig. 206

Fig. 207

sirve el punto N tomado en la traza P_v; se ha construido su proyección n_s ($n_s 1 = n'n$), por la cual, así como por el punto de intersección de la traza P_h con el eje S/H, pasa la traza P_s.

Las construcciones en las figs. 205 y 206 conducen a la obtención del ángulo de inclinación α de los planos dados al plano H. Si se toma el plano T (fig. 207) perpendicular al plano V y al plano dado por el triángulo ABC (para lo cual hay que trazar el eje V/T perpendicularmente a la frontal de este plano), entonces se determinará el ángulo de inclinación β del plano ABC al plano V.

Introducción de dos planos de proyección complementarios en el sistema *V, H*. Examinemos la introducción de dos planos de proyección complementarios en el sistema V, H, en el ejemplo siguiente.

Supongamos que se exige disponer la recta de posición general AB, dada en el sistema V, H, perpendicularmente al plano de proyección complementario. ¿Puede ser esto logrado introduciendo un solo plano complementario? No. Tal plano, siendo perpendicular a la recta de posición general, él mismo en el sistema V, H será un plano de posición general, es decir, no perpendicular ni a H, ni a V. Pero con ello se incumple la condición de introducción de planos de proyección complementarios (véase la pág. 28).

¿Cómo vencer este obstáculo y, con todo, emplear el método de cambio de los planos de proyección? Es necesario sujetarse al siguiente esquema: pasar del sistema V, H al sistema S, H, en el que

$S \perp H$ y $S \| AB$, y a continuación pasar al sistema S, T, donde $T \perp S$ y $T \perp AB$ (fig. 208). El dibujo correspondiente se da en la fig. 209. La tarea se reduce a la construcción sucesiva de las proyecciones a_s y a_t del punto A, b_s y b_t del punto B. La recta de posición general en el sistema V, H ha resultado ser perpendicular al plano de proyección complementario T con el paso por una etapa intermedia de paralelismo respecto al primer plano complementario S. Dado que

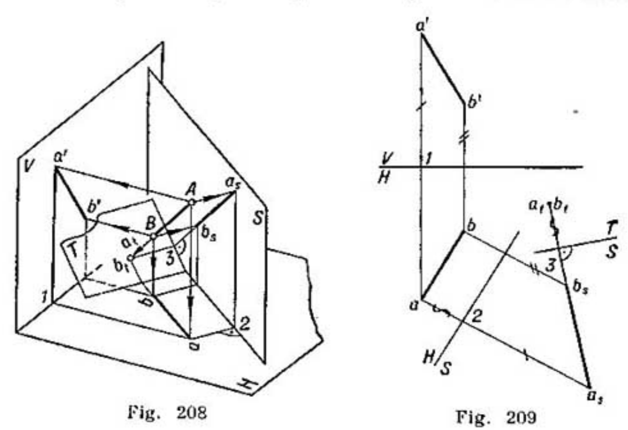


Fig. 208

Fig. 209

el plano S está dispuesto paralelamente a la recta AB, las distancias de los puntos A y B al plano S son iguales entre sí y se expresan, por ejemplo, por el segmento $a2$; tomando el eje S/T perpendicularmente a a_sb_s (lo que corresponde en el espacio a la perpendicularidad del plano T a la recta AB) y trazando el segmento $a_t\,3$ igual a $a2$, obtenemos ambas proyecciones a_t y b_t en un mismo punto, es decir, lo que debe obtenerse si $AB \perp T$.

En la fig. 210 se da un ejemplo de construcción de la forma verdadera del $\triangle ABC$. Aquí también se han introducido dos planos de proyección complementarios S y T, pero, por el esquema siguiente: $S \perp H$ y $S \perp ABC$, mientras que $T \perp S$ y $T \| ABC$. La etapa final de la construcción se ha reducido al trazado del plano $T \|$ al plano ABC (puesto que hacía falta determinar la forma verdadera del $\triangle ABC$); la etapa intermedia era la perpendicularidad del plano auxiliar S al plano ABC. Esta etapa intermedia repite la construcción mostrada un poco más arriba en la fig. 205. En la etapa final de construcción, en la fig. 210, el eje S/T es paralelo a la proyección $c_sa_sb_s$, es decir, el plano T se ha trazado paralelamente al plano ABC, lo cual

conduce a la determinación de la forma verdadera expresada por la proyección $a_t b_t c_t$.

Así pues, en este ejemplo, para obtener el paralelismo del plano del $\triangle ABC$ y el plano T, ha sido necesario disponer el plano del $\triangle ABC$ y el plano S perpendicularmente uno al otro. En el ejemplo de la fig. 209, al contrario, para obtener la perpendicularidad ($AB \perp T$) ha sido necesaria la posición preventiva de paralelismo ($AB \| S$).

Fig. 210

PREGUNTAS A LOS §§ 32—33

1. ¿Cuáles procedimientos de transformación del dibujo se examinan en el capítulo V?
2. ¿En qué consiste la diferencia fundamental de estos procedimientos?
3. ¿En qué consiste el método conocido bajo el nombre de «método de cambio de los planos de proyección»?
4. ¿Qué posición deberá ocupar en el sistema V, H el plano de proyección S introducido para formar el sistema S, H?
5. ¿Qué posición ocupará en el sistema V, H el plano de proyección T al pasar sucesivamente del sistema V, H, por el S, H, al sistema S, T?
6. ¿Cómo hallar la longitud del segmento de una recta y los ángulos formados por esta recta con los planos V y H, introduciendo planos de proyección complementarios?
7. ¿Cuántos planos de proyección complementarios deberán ser introducidos en el sistema V, H para determinar la forma verdadera de una figura cuyo plano es perpendicular al plano H o al plano V?
8. ¿Cuántos planos complementarios y en qué sucesión deberán ser introducidos en el sistema V, H para que la recta dada de posición general sea perpendicular al plano de proyección complementario?
9. La misma pregunta, pero respecto a la obtención de la forma verdadera de una figura cuyo plano es un plano de posición general.

§ 34. FUNDAMENTOS DEL MÉTODO DE GIRO[1]

Al girar una figura alrededor de cierta recta fija (*eje de giro*) cada punto de esta figura se desplaza en un plano perpendicular al eje de giro (*plano de giro*). El punto describe una circunferencia cuyo

[1] El método de giro fue expuesto detalladamente por V. I. Kurdiúmov en su libro «Curso de Geometría Descriptiva» en el apartado dedicado a las proyecciones ortogonales.

centro es el punto de intersección del eje con el plano de giro (*centro de giro*), y cuyo radio es igual a la distancia desde el punto que gira hasta el centro (este es el *radio de giro*). Si un punto cualquiera del sistema dado se encuentra en el eje de giro, al girar el sistema este punto se considera fijo.

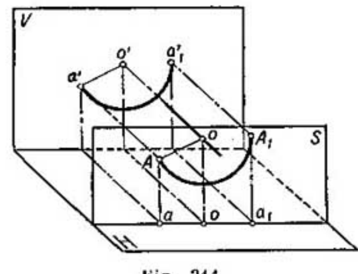


Fig. 211

El eje de giro puede ser dado o elegido; en el último caso es conveniente disponer el eje perpendicularmente a uno de los planos de proyección, puesto que se simplifica la construcción.

Efectivamente, si el eje de giro es perpendicular, por ejemplo, al plano V, entonces, el plano en el que sucede el giro del punto es paralelo al plano V. Por consiguiente, la trayectoria del punto se proyecta sobre este plano sin desfiguraciones, y sobre el plano H, en forma de un segmento de recta (fig. 211).

§ 35. GIRO DE UN PUNTO, UN SEGMENTO DE RECTA Y UN PLANO ALREDEDOR DE UN EJE PERPENDICULAR AL PLANO DE PROYECCIÓN

Giro alrededor de un eje dado.

1. Supongamos que el punto A gira alrededor de un eje perpendicular al plano H (fig. 212). Por el punto A se ha trazado el plano T perpendicular al eje de giro y, por consiguiente, paralelo al plano H. Al girar el punto A describe en el plano T una circunferencia de radio R; la magnitud de este radio se expresa por la longitud de la perpendicular trazada desde el punto A al eje. La circunferencia descrita por el punto A en el espacio, se proyecta sobre el plano H en tamaño natural. Dado que el plano T es perpendicular al plano V, las proyecciones de los puntos de la circunferencia sobre el plano V estarán situados sobre T_v, es decir, sobre una recta perpendicular a la proyección frontal del eje de giro. El dibujo se da en la fig. 212, a la derecha: la circunferencia descrita por el punto A al girar alrededor del eje, se ha proyectado sobre el plano H en tamaño natural. Desde el punto o como centro se ha trazado una circunferencia de radio $R=oa$; en el plano V esta circunferencia viene representada por el segmento de una recta, igual a $2R$.

En la fig. 213 está representado el giro del punto A alrededor de un eje perpendicular al plano V. La circunferencia descrita por el punto A se ha proyectado sobre el plano V en tamaño natural.

Desde el punto o', como centro, se ha trazado la circunferencia de radio $R=oa$; sobre el plano H esta circunferencia se representa con el segmento de una recta, igual a $2R$.

De los ejemplos examinados en las figs. 212 y 213 se aprecia claramente que *al girar un punto alrededor de un eje perpendicular a un plano de proyección cualquiera, una de las proyecciones de dicho punto se desplaza por una recta perpendicular a la proyección del eje de giro.*

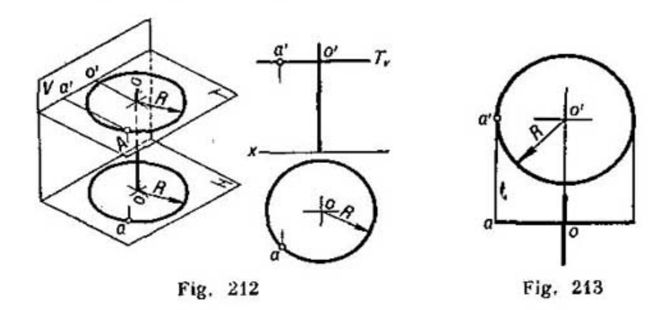


Fig. 212 Fig. 213

En la fig. 214 se muestra el giro de un punto A en sentido contrario a las agujas del reloj de un ángulo α alrededor de un eje que pasa por el punto O perpendicularmente al plano V. Desde el punto o', como centro, se ha trazado el arco de radio $o'a'$, correspondiente al angulo α y al sentido de giro. El punto a_1' es la nueva posición de la proyección frontal del punto A.

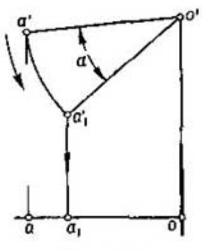


Fig. 214

2. Examinemos ahora el giro del segmento de una recta alrededor de un eje dado. El segmento AB (fig. 215) ha sido girado a la posición A_1B_1. Evidentemente, el problema se ha reducido a girar los puntos A y B un ángulo dado α, en el sentido dado. Las trayectorias de desplazamiento de las proyecciones frontales de estos puntos se indican con rectas trazadas por a' y b' perpendicularmente a la proyección frontal del eje de giro.

La nueva posición de la proyección horizontal del punto A (el punto a_1) se ha obtenido al girar el radio oa el ángulo dado α. Para hallar el punto b_1 (la posición de la proyección horizontal del punto B después del giro) se ha trazado el arco de radio ob y sobre este arco se ha trazado la cuerda bb_1, igual a la cuerda 1—2; esto corresponde al giro del punto B un mismo ángulo α.

Luego, a partir de los puntos a_1 y b_1 se han trazado las líneas de referencia hasta su intersección con las direcciones de desplazamiento de las proyecciones frontales; se han obtenido las proyecciones a_1' y b_1'.

Los segmentos entre los puntos a_1' y b_1' y entre los puntos a_1 y b_1 determinan las nuevas posiciones de las proyecciones frontal y horizontal del segmento AB después de su giro a la posición A_1B_1.

Dado que en los triángulos *abo* y a_1b_1o (fig. 215) los lados *bo* y *ao* del triángulo *abo* (como radios) son respectivamente iguales a los

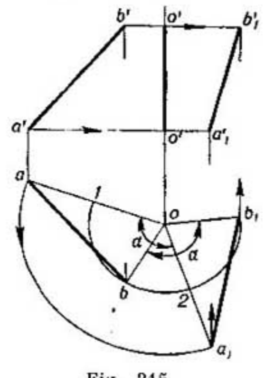


Fig. 215

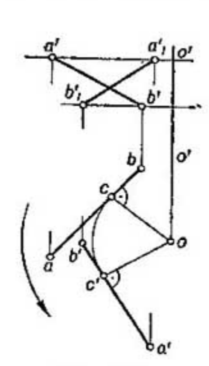


Fig. 216

lados b_1o y a_1o del triángulo a_1b_1o y los ángulos comprendidos entre los lados indicados son también iguales, estos triángulos son iguales entre sí. Por consiguiente, $ab=a_1b_1$, es decir, *la magnitud de la proyección horizontal de un segmento girado alrededor de un eje perpendicular al plano H, no varía.* Evidentemente, también es justa semejante conclusión respecto a *la proyección frontal de un segmento al hacerlo girar alrededor de un eje perpendicular al plano V.*

En los triángulos iguales entre sí *abo* y a_1b_1o (fig. 215) serán también iguales sus alturas trazadas, por ejemplo, desde el punto *o* a los lados *ab* y a_1b_1.

Las conclusiones deducidas permiten establecer el siguiente procedimiento de construcción de las nuevas proyecciones de un segmento que se hace girar alrededor de un eje un ángulo dado (fig. 216). Por el punto *o* trazamos una recta perpendicular a *ab*; el punto *c* (de intersección de la perpendicular con *ab*) lo giramos el ángulo dado. Trazando por el punto c_1 (la nueva posición del punto *c*) una recta perpendicular al radio oc_1 obtenemos la dirección de la nueva posición de la proyección horizontal del segmento. Puesto

que los segmentos ca y cb no varían su magnitud, entonces, trazando desde el punto c_1 los segmentos $c_1 a_1 = ca$ y $c_1 b_1 = cb$, hallamos la nueva posición $a_1 b_1$ de la proyección de todo el segmento. La nueva posición de la proyección frontal $a'_1 b'_1$ se halla de la misma manera que anteriormente.

Con ayuda del procedimiento indicado se puede no solamente girar el segmento un ángulo dado, sino determinar el ángulo que debe girarse el segmento dado para que tome la posición requerida (por ejemplo, disponerlo paralelamente al plano V).

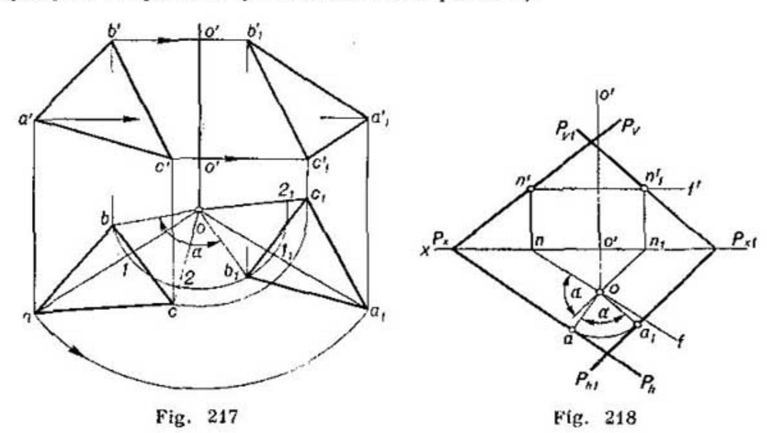


Fig. 217 Fig. 218

3. El giro de un plano alrededor de un eje dado se reduce al giro de los puntos y rectas pertenecientes a este plano.

Un ejemplo de este caso se da en la fig. 217: el triángulo ABC que determina el plano se ha girado a la posición $A_1B_1C_1$ de acuerdo con el ángulo dado α y la dirección indicada por la flecha. La construcción es semejante a la dada en la fig. 215: allí fueron girados dos puntos A y B, aquí tres, los vértices A, B y C, y, por consiguiente, toda la figura. Los triángulos abc y $a_1b_1c_1$ son iguales entre sí según la construcción: siendo el eje perpendicular al plano H, la proyección horizontal no varía su magnitud. Esto corresponde a que, si el eje de giro es perpendicular al plano H, el ángulo de inclinación del plano ABC respecto al plano H no varía. Evidentemente, al girar un plano alrededor de un eje perpendicular al plano V, el ángulo de inclinación del plano dado al plano V no varía y las magnitudes de las proyecciones frontales se conservan.

Al girar un plano dado por sus trazas, corrientemente se hacen girar una de sus trazas y la horizontal (o la frontal) del plano. Un

ejemplo se da en la fig. 218; el plano de posición general P se ha girado un ángulo α alrededor de un eje perpendicular al plano H. Sobre la traza P_h se ha tomado un punto $a(oa \perp P_h)$, el punto más cercano al eje de giro, de manera semejante a como se tomó el punto c en la fig. 216. Luego el punto a se ha girado un ángulo α. Por el punto obtenido a_1 se ha trazado una recta perpendicular a oa_1; ésta es la traza horizontal del plano en su nueva posición.

Para hallar la traza frontal del plano después de su giro basta hallar, además del punto obtenido P_{x1} en el eje x, un punto más perteneciente a la traza. En el plano P ha sido tomada la horizontal nf, $n'f'$, que corta al eje de giro (nf pasa por la proyección horizontal del eje de giro). Claro está, que se puede tomar una horizontal que no corte al eje de giro. Puesto que también en la nueva posición del plano la horizontal permanece paralela a su traza horizontal, por el punto o se debe trazar una recta paralela a P_{h1}; se obtendrá la nueva posición de la proyección horizontal de la horizontal. Su proyección frontal no varía su dirección, por lo cual es fácil hallar la nueva traza frontal de la horizontal, el punto n'_1. Ahora se puede construir la traza frontal (P_{v1}).

Giro alrededor de un eje elegido. En toda una serie de casos el eje de giro puede ser elegido. En este caso, si el eje de giro se elige de modo que pase por uno de los extremos de un segmento, la construcción se simplificará, puesto que el punto por el que pasa el eje será «fijo» y para girar el segmento hay que construir la nueva posición de la proyección de un solo punto, el del otro extremo.

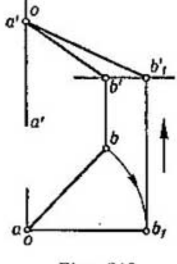


Fig. 219

En la fig. 219 se muestra un caso cuando para el giro del segmento AB se ha elegido un eje de giro perpendicular al plano H y que pasa por el punto A. Al girar el segmento alrededor de tal eje se puede, por ejemplo, disponerlo paralelamente al plano V. Precisamente tal posición se muestra en la fig. 219. La proyección horizontal del segmento, en su nueva posición, es perpendicular a la línea de referencia aa'. Una vez hallado el punto b'_1 y construido el segmento $a'b'_1$, obtenemos la nueva posición de la proyección frontal del segmento AB. La proyección $a'b'_1$ expresa la longitud del segmento AB. El ángulo $a'b'_1b'$ es igual al ángulo formado por la recta AB con el plano H.

Si nos proponemos el objetivo de hallar el ángulo de inclinación de una recta de posición general al plano V, hay que trazar el eje de giro perpendicularmente al plano V y girar la recta de modo que quede paralela al plano H. Proponemos al lector efectuar tal construcción.

Si al girar un plano, dado por sus trazas, se puede elegir el eje de giro, es conveniente disponerlo en el plano de proyección; en este caso las construcciones se simplifican. Un ejemplo se da en la fig. 220. Supongamos que el eje de giro debe ser perpendicular al plano H. Si lo tomamos en el plano V, sobre la traza P_v se encontrará el punto «fijo» O (en su intersección con el eje de giro). Después de girar el plano, su traza frontal debe pasar por este punto. Por consiguiente, una vez hallada la posición de la traza horizontal (P_{h1}) despues del giro, hay que trazar la traza P_{v1} por los puntos P_{x1} y o'. En comparación con la fig. 218 la simplificación consiste en que no se necesita la horizontal. Esta sería necesaria en el caso de que el punto

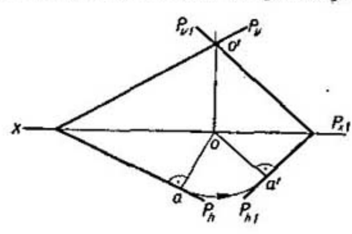


Fig. 220

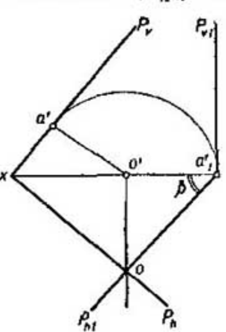


Fig. 221

P_{x1} resultara fuera de los límites del dibujo; pero en un caso análogo en la fig. 218 se tendrían que haber tomado dos líneas auxiliares.

En la fig. 221 el plano de posición general se ha girado a la posición de plano proyectante horizontal; en este caso se ha determinado el ángulo de inclinación del plano P al plano V. Si se toma el eje de giro perpendicular al plano H, el plano P puede ser colocado en la posición de plano proyectante frontal, determinando en este caso el ángulo de inclinación de este plano al plano H.

Comparando los planos antes y después del giro, observamos que el ángulo formado por las trazas P_v y P_h en el dibujo, en general, varía.

Si nos imaginamos un cono circular con su vértice en el punto O y base en el plano H en la fig. 220, y en el plano V en la fig. 221, y un plano P tangente al cono, entonces, el giro del plano P alrededor del eje de giro coincidente con el eje del cono, representa como el «recorrido» del cono por este plano tangente.

PREGUNTAS A LOS §§ 34 Y 35

1. ¿En qué consiste el método de giro?
2. ¿Qué significa plano de giro de un punto y cómo se dispone respecto del eje de giro?

3. ¿Qué significa centro de giro de un punto al girar éste alrededor de cierto eje?

4. ¿Qué significa radio de giro de un punto?

Las preguntas que siguen se refieren al giro alrededor de un eje perpendicular al plano de proyección.

5. ¿Cómo se desplazan las proyecciones de un punto?

6. ¿Cuál de las proyecciones del segmento de una recta no varía su magnitud?

7. ¿Cómo se efectúa el giro de un plano: a) no expresado por sus trazas, b) expresado por sus trazas?

8. ¿En qué caso no varía durante el giro la inclinación de una recta: a) al plano H, b) al plano V?

9. La misma pregunta respecto al plano W.

10. ¿Se puede con ayuda del giro determinar la longitud del segmento de una recta y el ángulo de inclinación de ésta al plano V y al plano H?

11. ¿Se puede con auxilio del giro de un plano determinar el ángulo de inclinación de este plano al plano V y al plano H?

12. ¿Cuál es la posición conveniente que se le puede dar al eje de giro al girar: a) el segmento de una recta, b) un plano expresado por sus trazas?

§ 36. EMPLEO DEL MÉTODO DE GIRO SIN INDICACIÓN EN EL DIBUJO DE LOS EJES DE GIRO PERPENDICULARES A LOS PLANOS DE PROYECCIÓN *V* O *H*

Más arriba (véase el § 35) ya vimos que si se gira el segmento de una recta o una figura plana alrededor de un eje perpendicular al plano de proyección, la proyección sobre este plano no varía ni su forma ni su magnitud, varía solamente la posición de esta proyección respecto al eje de proyección. En cuanto a la otra proyección, la proyección sobre el plano paralelo al eje de giro, todos los puntos de esta proyección (excepto, claro está, las proyecciones de los puntos situados en el eje de giro) se desplazan por rectas paralelas al eje de proyección, y la proyección varía su forma y su magnitud. Valiéndose de estas propiedades se puede aplicar el método de giro sin indicar el eje de giro y sin establecer la magnitud del radio de giro; basta desplazar una de las proyecciones de la figura examinada (sin variar su forma y magnitud) a la posición requerida y luego construir la otra proyección como fue indicado más arriba.

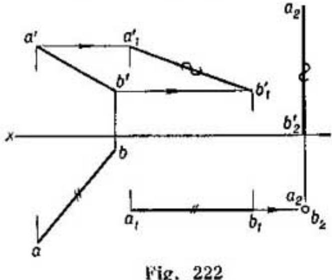


Fig. 222

Por ejemplo, proponiéndose el objetivo de girar el segmento AB de una recta de posición general (fig. 222) de modo que resulte perpendicular al plano H, comenzamos con el giro alrededor de un

eje perpendicular al plano H hasta que ocupe una posición paralela al plano V, pero sin indicar este eje en el dibujo. Puesto que en el caso de tal giro la proyección horizontal del segmento no varía su magnitud, la proyección a_1b_1 se toma igual a ab y se dispone paralelamente al eje x, lo que corresponde al paralelismo del propio segmento al plano V.

Una vez hallada la correspondiente proyección frontal del segmento ($a_1'b_1'$) realizamos el segundo giro, ahora alrededor de un eje

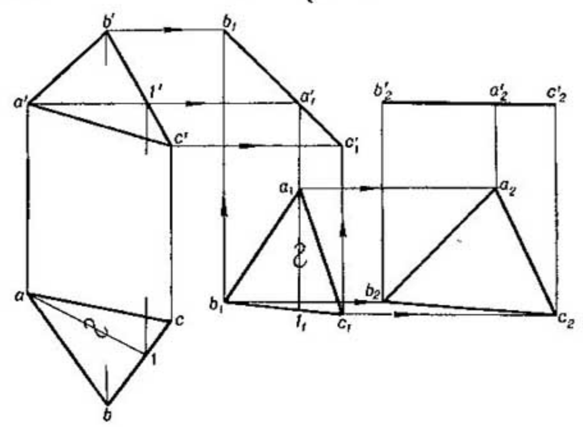


Fig. 223

perpendicular al plano V, hasta la posición buscada, es decir, hasta que AB sea perpendicular al plano H. Este eje tampoco se indica en el dibujo. Colocamos la proyección $a_2'b_2'$, igual a $a_1'b_1'$, perpendicularmente al eje x. La proyección horizontal del segmento se expresa por un punto con doble denotación, a_2b_2.

Así pues, las operaciones ejecutadas corresponden a giros alrededor de ejes perpendiculares a los planos de proyección, pero estos ejes no se indican. Claro está, que pueden ser hallados. Por ejemplo, si se traza una recta por los puntos a y a_1 y otra por los puntos b y b_1 y a continuación se levantan perpendiculares a los puntos medios de los segmentos aa_1 y bb_1, el punto obtenido de intersección de estas perpendiculares será precisamente la proyección horizontal del eje de giro perpendicular al plano H. Pero, como se ve, no hay necesidad de ello.

En la fig. 223 se muestran dos etapas del giro del ΔABC, situado en un plano de posición general, con la finalidad de obtener la forma

verdadera de este triángulo. En efecto, en su última posición, este triángulo es paralelo al plano H y, por tanto, la proyección $a_2b_2c_2$ representa la forma verdadera del triángulo. Pero, para obtener tal posición, hay que girar previamente el plano de posición general en el que está situado el triángulo de modo tal, que este plano resulte perpendicular al plano V. Para ello hay que tomar la horizontal en el $\triangle ABC$ y girarla hasta que resulte perpendicular al plano V; entonces, también el triángulo que contiene esta horizontal resultará ser perpendicular al plano V. Puesto que la construcción se realiza

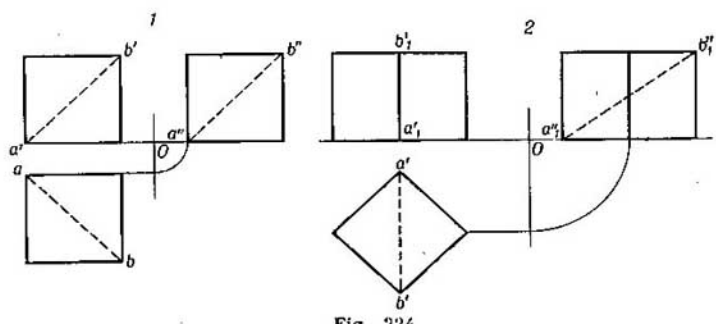


Fig. 224

sin indicación de los ejes de giro, disponemos la proyección $a_1b_1c_1$ arbitrariamente, pero de tal modo que la horizontal sea perpendicular al plano V; para ello dirigimos la proyección de la horizontal a_11_1 paralelamente aunque sea a la línea de referencia $a'a$ (el dibujo se ha cumplido sin eje de proyección). Durante este giro se supone que el eje de giro es perpendicular al plano H; por eso la proyección horizontal del triángulo conserva su forma y magnitud ($a_1b_1c_1=abc$), varía solamente su posición. Dado que los puntos A, B y C durante tal giro se desplazan en planos paralelos al plano H, las proyecciones b_1', a_1' y c_1' se encuentran en las líneas de referencia horizontales $a'a_1'$, $b'b_1'$ y $c'c_1'$.

Durante el segundo giro, que lleva al triángulo a una posición paralela al plano H, el eje de giro se supone perpendicular al plano V. Ahora, durante el giro la proyección frontal conserva su forma y magnitud, obtenidas en la segunda etapa de giro; los puntos A_1, B_1 y C_1 se desplazan en planos paralelos al plano V; las proyecciones a_2, b_2 y c_2 se encuentran en las líneas de referencia horizontales de los puntos a_1, b_1 y c_1.

La proyección $a_2b_2c_2$ expresa la forma y la magnitud verdaderas del triángulo ABC.

El empleo de este método, en primer lugar, simplifica en cierto grado las construcciones, y, en segundo lugar, no sucede la superposición de una proyección sobre la otra, aunque el dibujo ocupa mayor superficie [1].

En las figs. 224 y 225 se da un ejemplo más del giro sin indicación de los ejes de giro.

En estas figuras se muestra el giro consecutivo de un cubo, y cómo se lleva a una posición en la que la diagonal *AB* se sitúa perpendicularmente al plano *V*.

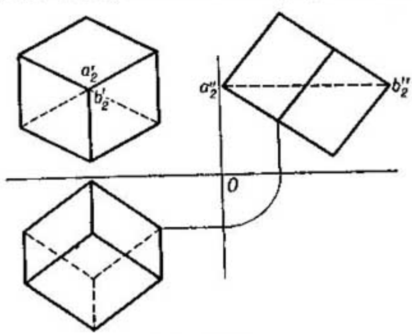


Fig. 225

Primero, mediante el giro alrededor de un eje perpendicular al plano *H*, el cubo se ha llevado a una posición en la que la diagonal *AB* se encuentra en el plano de perfil (fig. 224).

De esta posición el cubo se ha pasado a una tercera, en la que la diagonal *AB* es perpendicular al plano *V* (fig. 225). Esto se ha alcanzado girando el cubo alrededor de un eje perpendicular al plano *W* [2].

§ 37. GIRO DE UN PUNTO, UN SEGMENTO DE RECTA Y UN PLANO ALREDEDOR DE UN EJE PARALELO AL PLANO DE PROYECCIÓN, Y ALREDEDOR DE LA TRAZA DE UN PLANO

Giro de una figura plana alrededor de su horizontal. Para determinar la forma y las dimensiones de una figura plana, ésta puede ser girada alrededor de su *horizontal* de modo que como resultado de este giro la figura se sitúe paralelamente al plano *H*.

---

[1] El caso de giro examinado, a saber: sin indicación de los ejes de giro, se suele llamar «método de desplazamiento planoparalelo».

[2] La proyección del cubo sobre el plano *V*, obtenida en este caso, (fig. 225), coincide con la representación del cubo en la proyección isométrica rectangular estudiada en el curso de dibujo lineal en las escuelas secundarias.

Examinemos primeramente el giro de un punto (fig. 226). El punto B gira alrededor de cierto eje horizontal On', describiendo un arco de circunferencia, situado en el plano S. Este plano es perpendicular al eje de giro y, por consiguiente, es un plano proyectante horizontal; por esta razón, la proyección horizontal de la circunferencia descrita por el punto B deberá encontrarse en la traza S_h.

Si el radio OB ocupa la posición paralela al plano H, entonces, la proyección ob_1 es igual a OB_1, es decir, igual a la magnitud verdadera del radio OB.

Examinemos ahora la fig. 227. En esta figura se muestra el giro del triángulo ABC. Como eje de giro se ha tomado la horizontal AD. El punto A situado en el eje de giro permanecerá en su lugar. Por consiguiente, para representar la proyección horizontal del triángulo después del giro hay que hallar las proyecciones de los otros

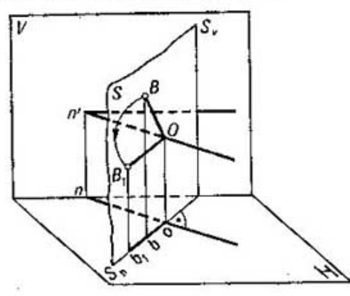


Fig. 226

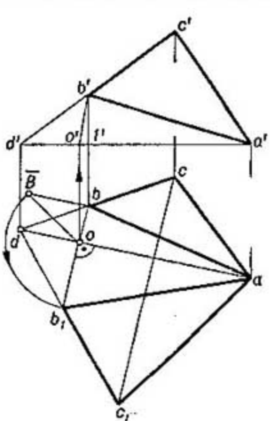


Fig. 227

dos vértices. Bajando desde el punto b una perpendicular a ad hallamos la proyección horizontal del centro de giro, el punto o, y la proyección horizontal del radio de giro del punto B, el segmento ob, y luego, la proyección frontal del centro de giro, el punto o', y la proyección frontal del radio de giro del punto B, el segmento $o'b'$. Ahora es necesario determinar la magnitud verdadera del radio de giro del punto B. Para ello se ha aplicado el método indicado en el § 13, es decir, la construcción del triángulo rectángulo. Por los catetos ob y $b\overline{B}=b'1'$ construimos el triángulo rectángulo $ob\overline{B}$; su hipotenusa es igual al radio de giro del punto B.

Ahora se puede hallar la posición del punto b_1, y a continuación la del punto c_1, sin determinar el radio de giro del punto C, sino hallar la posición del punto c_1 en la intersección de dos rectas, una de

las cuales es la perpendicular trazada desde el punto c a la recta ad, y la otra, pasa por el punto hallado b_1 y por el punto d (la proyección horizontal del punto D, perteneciente al lado BC y situado en el eje de giro).

La proyección ab_1c_1 expresa la magnitud verdadera del triángulo ABC, puesto que después del giro el plano del triángulo es paralelo al plano H. La proyección frontal del triángulo se confunde con la proyección frontal de la horizontal, es decir, representa una línea recta.

En la fig. 227 se da la construcción para el caso cuando la horizontal ha sido trazada fuera de los límites de las proyecciones del triángulo. Esto permite evitar que las proyecciones se confundan, pero el dibujo ocupa mayor superficie.

Si se exige girar una figura plana hasta una posición paralela al plano V, como eje de giro debe tomarse la *frontal*.

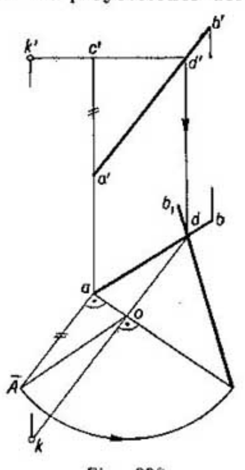


Fig. 228

Prestemos atención a que en la construcción mostrada en la fig. 226, la proyección $o'b'$ del radio de giro del punto B no participa. Evidentemente, una vez comprendida la esencia de la construcción, esta proyección puede no construirse. Un ejemplo se da en la fig. 228, donde se muestra el giro de un plano dado por el punto K y la recta AB, hasta que ocupa una posición paralela al plano H. El giro se ha realizado alrededor de la horizontal KD. La horizontal ha sido trazada por el punto K que, por consiguiente, permanece «fijo». Queda girar la recta AB alrededor de KD, mejor dicho, girar, por ejemplo, solamente el punto A, puesto que el punto D en la recta AB también es «fijo»: pertenece al eje de giro. Trazando $ao \perp kd$, es decir, fijando la posición de la traza horizontal del plano proyectante horizontal al que pertenece y en el que gira el punto A, obtenemos el punto o, la proyección horizontal del centro de giro del punto A, y el segmento oa, la proyección horizontal del radio de giro del punto A. Ahora hallamos la magnitud verdadera del radio de giro R_A, como la hipotenusa del triángulo $oa\bar{A}$, en el que el cateto $a\bar{A} = a'c'$. Una vez hallado el punto a_1, la proyección horizontal del punto A después del giro, trazamos a_1b_1, la proyección horizontal de la recta AB después del giro, valiéndonos del punto d. De este modo, nos han sido innecesarias las proyecciones frontales del centro de giro y del radio de giro.

Giro de un plano alrededor de su traza hasta su abatimiento con el correspondiente plano de proyección [1]. Si se gira un plano alrededor de su traza hasta su abatimiento con el plano de proyección en el que está situada esta traza, los segmentos de líneas y figuras,

[1] Este caso es conocido también bajo el nombre de «método de abatimiento».

dispuestos en el plano se representan en tamaño natural. Evidentemente, esta construcción es análoga por su contenido al giro de un plano alrededor de su horizontal o frontal hasta su paralelismo con el correspondiente plano de proyección: la traza horizontal del plano puede considerarse como su horizontal «cero», y la traza frontal, como su frontal «cero».

En la fig. 229 se muestra el abatimiento de un plano de posición general P con el plano H, con la particularidad de que el giro se ha realizado alrededor de la traza P_h en sentido desde el plano V hacia el observador.

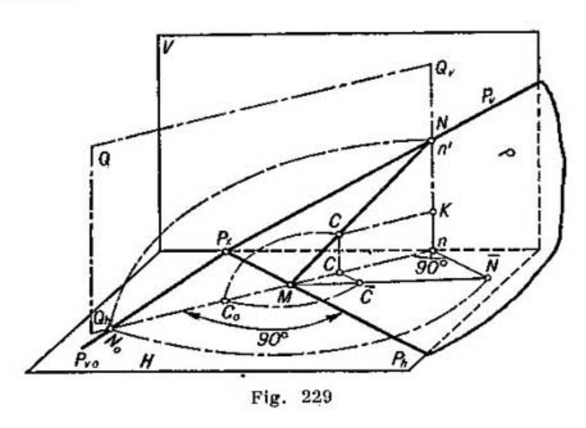


Fig. 229

En la posición de abatimiento con el plano H, en el plano P se encontrarán dos rectas que se cortan, la traza P_h y la recta P_{v0} que representa la traza P_v abatida sobre el plano H.

La traza P_h, como eje de giro, no varía su posición; el punto de intersección de las trazas tampoco varía su posición y, por tanto, si se exigiera indicar la posición abatida de la traza P_v bastaría hallar un punto más de esta traza (además del punto P_x) en la posición abatida sobre el plano H. Hallemos la posición abatida de un punto cualquiera N situado en la traza P_v. Este punto describirá un arco de circunferencia en el plano Q perpendicular al eje de giro; el centro de este arco se encuentra en el punto M_0 de intersección del plano Q con la traza P_h. Describiendo desde el punto M_0 un arco de radio M_0N en el plano Q, obtenemos en la intersección de este arco con la traza Q_h el punto N_0 en el plano H. Trazando por P_x y N_0 una recta, obtenemos P_{v0}. Puesto que el segmento P_xN no varía su magnitud durante el giro del plano, entonces, es evidente, que el punto N_0 puede ser

obtenido en la intersección de Q_h con el arco descrito en el plano H desde P_x con un radio igual a P_xN.

En el dibujo (fig. 230) sobre la traza P_v se ha elegido un punto arbitrario N (este punto se confunde con su proyección n'); por su proyección n se ha trazado la recta nM_0 perpendicular al eje de giro, es decir, a la traza P_h. Sobre esta recta deberá estar situado el punto N después de su abatimiento sobre el plano H, a una distancia del punto M_0 igual al radio de giro del punto N, o a la distancia de P_xn' del punto P_x. La longitud del radio de giro se puede determinar como la hipotenusa del triángulo rectángulo con los catetos M_0n y $n\overline{N}(n\overline{N} = nn')$. Trazando desde el punto M_0 un arco de radio $M_0\overline{N}$, o desde el punto P_x un arco de radio P_xn', obtenemos, sobre la recta nM_0, la posición del punto N abatida sobre el plano H, es decir, el punto N_0. Trazando por los puntos P_x y N_0 una recta, obtenemos la posición abatida de la traza P_v, la recta P_{v0}.

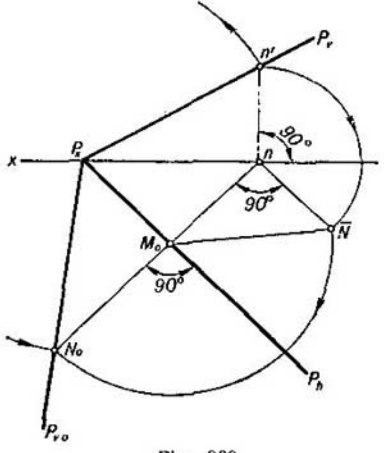


Fig. 230

Volvamos a la fig. 229 y examinemos en ella el abatimiento del punto C sobre el plano H.

En la fig. 231, a la izquierda, se muestra cómo se halla la posición abatida del punto C sobre el plano H. Por el punto c se ha trazado la recta cM_0 perpendicular a P_h. El radio de giro $M_0\overline{C}$ ha sido hallado como la hipotenusa del triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es M_0c y el otro es $c\overline{C} = {}_1c'1$. Con radio $M_0\overline{C}$ trazamos desde el punto M_0 un arco e intersecamos en la prolongación de la recta cM_0 el punto C_0 que es la posición del punto C en el plano H.

Esta construcción puede efectuarse también, así como se muestra en la fig. 231 a la derecha. Estableciendo la posición del punto C en el plano P con ayuda de la frontal y trazando la recta cM_0 perpendicularmente a P_h, intersecamos esta recta con un arco con centro en el punto l y radio igual al segmento $c'l'$, es decir, a la magnitud verdadera del segmento CL en el plano P. Después del abatimiento esta magnitud se conserva: $c_0l = CL$. Si en el plano se da el segmento de una recta, entonces, hallando la posición abatida de los extremos de este segmento, obtenemos *la magnitud verdadera del segmento*.

Como es conocido, toda horizontal tomada en el plano P se dispone paralelamente a P_h, y toda frontal, paralelamente a P_v; por esta razón, si fuera necesario hallar la posición abatida de la horizontal o la frontal, bastaría hallar la posición abatida de la traza de éstas y por esta traza trazar una recta paralela a P_h o P_{v0} respectivamente (si el plano P está abatido sobre el H).

Utilizaremos lo dicho para la construcción inversa. Sea dado el punto C_0, o sea, la posición del punto C abatida sobre el plano H; hay que hallar la proyección del punto C, si éste debe encontrarse en el plano P dado por sus trazas (véase también la fig. 229).

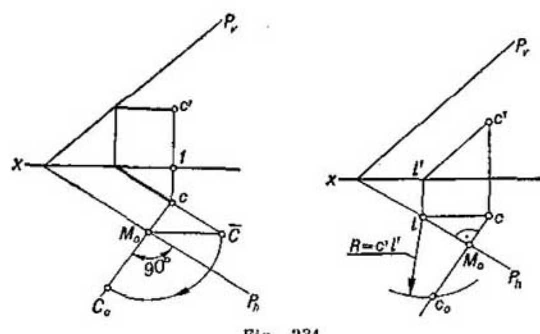


Fig. 231

Cuando el punto C_0 «se levanta al espacio», su proyección horizontal (el punto c) se desplaza por la recta C_0n (fig. 232) perpendicular a P_h, es decir, por la traza Q_h del plano de giro Q. El punto C deberá encontrarse en el espacio sobre la línea de intersección del plano P con el plano de giro (fig. 229) a una distancia M_0C_0 del punto M_0.

Construyamos sobre el plano H el triángulo rectángulo $M_0n\overline{N}$, en el cual el lado $n\overline{N}=n'n$ (fig. 232) y que, por consiguiente, es igual al triángulo Mnn' en el espacio.

Trazando en la hipotenusa $M_0\overline{N}$, a partir del punto M_0, el segmento M_0C_0 (el radio de giro), obtenemos el punto $\overline{C}$. Trazando por este punto una recta perpendicular a M_0n, obtenemos el punto c, que es la posición buscada de la proyección horizontal del punto C.

El punto c' deberá encontrarse en la perpendicular trazada desde el punto c al eje x, a una distancia $c'1$ igual a $c\overline{C}$.

Si hay que «levantar al espacio» el segmento de una recta, en el caso general, se deben levantar dos de sus puntos así como se acaba

de indicar, o emplear el llamado punto «fijo». Esto se muestra en la fig. 233, donde había que «levantar al espacio» (es decir, al plano P) el segmento AB dado en la posición abatida sobre el plano H (A_0B_0). La construcción se ha complicado un poco por el hecho de que el punto de intersección de las trazas P_v y P_h se considera inaccesible.

Se ha construido el plano auxiliar $Q \| P$, y se ha hallado la traza Q_v en el abatimiento sobre el plano H. Dado que $Q \| P$, Q_{v0} determina la dirección de las frontales tanto del plano Q como del plano

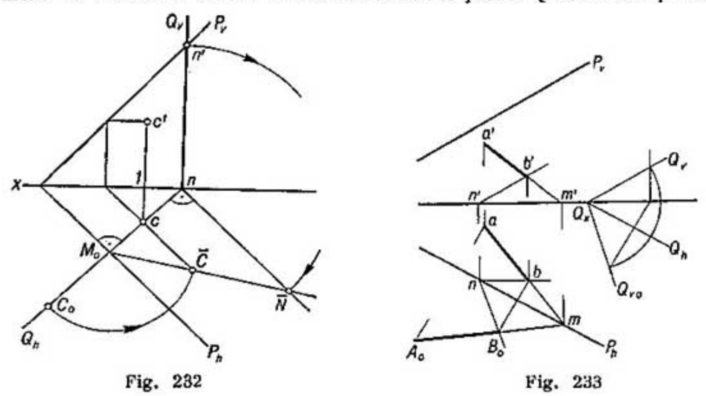


Fig. 232

Fig. 233

P en la posición abatida sobre el plano H. Por esta razón, trazando $B_0n \| Q_{v0}$ obtenemos en la posición abatida sobre el plano H la frontal del plano P a la que pertenece en el espacio el punto B. Construyendo las proyecciones de esta frontal hallamos sobre ellas las proyecciones b y b'. Si prolongamos ahora la recta A_0B_0 hasta su intersección con la traza P_h en el punto m, entonces, la proyección horizontal ab se encontrará sobre la recta que pasa por este punto «fijo» m y por la proyección construida b. La proyección $a'b'$ se obtendrá sobre la recta que pasa por los puntos m' y b'.

Hemos examinado el abatimiento de un plano sobre el plano de proyección horizontal, efectuando el giro del plano alrededor de la traza horizontal. Si se exige abatir este plano sobre el plano frontal de proyección, se debe girar el plano alrededor de su traza frontal.

Si se gira un plano proyectante horizontal alrededor de su traza frontal hasta que coincida con el plano V, la traza horizontal del plano después del abatimiento se situará sobre el eje de proyección.

Lo mismo, si se gira un plano proyectante frontal alrededor de su traza horizontal hasta hacerlo coincidir con el plano H, la traza frontal de este plano se situará sobre el eje de proyección.

En la fig. 234 se representa un plano cuyas trazas Q_v y Q_h forman entre sí un ángulo obtuso en el abatimiento sobre el plano H al ser girado «hacia el observador» y al ser girado en sentido contrario.

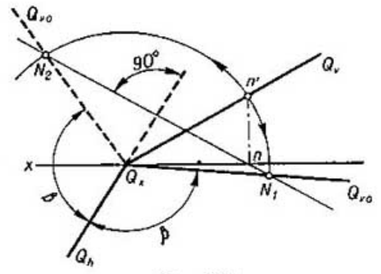


Fig. 234

PREGUNTAS A LOS §§ 36 Y 37

1. ¿Se puede mostrar en el dibujo el giro, por ejemplo, de una recta alrededor de un eje perpendicular al plano H o al V sin representar el eje de giro? ¿En qué se funda tal artificio?

2. ¿Cómo se le suele llamar al giro sin representación del eje de giro?

3. ¿Cómo se sitúa el plano de giro de un punto, si el eje de giro de este último es solamente paralelo al plano H o al V, pero no es perpendicular ni al plano H ni al V? ¿Por qué hay que determinar en este caso la magnitud verdadera del radio de giro?

4. ¿Qué sirve de índice de haber alcanzado la posición horizontal de un plano dado por su horizontal y un punto, al ser girado alrededor de esta horizontal y dónde se obtiene la proyección frontal del punto después del giro?

5. ¿Qué se comprende bajo el nombre de «método de abatimiento»?

6. ¿Qué se comprende bajo el nombre de «levantamiento al espacio»?

§ 38. EJEMPLOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON EL EMPLEO DEL MÉTODO DE CAMBIO DE LOS PLANOS DE PROYECCIÓN Y EL MÉTODO DE GIRO

1. Construir las proyecciones del punto de intersección de dos rectas de perfil situadas en un mismo plano de perfil.

La resolución se da en la fig. 204. Se ha empleado el método de cambio de los planos de proyección. Para obtener la proyección k' hay que trazar el segmento $k'2$ igual al segmento hallado k_q1.

2. Trazar un plano complementario de proyección de tal modo que la recta de posición general sea perpendicular a este plano.

La resolución se expone en la fig. 209. Se han introducido consecutivamente dos planos de proyección complementarios. El segmento AB se ha situado perpendicularmente al segundo plano de proyección complementario T.

3. Girar una recta de posición general de tal manera que resulte perpendicular al plano H.

La resolución se da en la fig. 222. Se han empleado dos giros. Después del segundo giro el segmento AB es perpendicular al plano H.

4. Determinar la longitud del segmento de una recta de posición general y los ángulos de inclinación de esta recta a los planos de proyección V y H.

En la fig. 202 se expone la resolución por el método de cambio de los planos de proyección. Se ha introducido un plano complementario $T \perp V$ y paralelo al segmento dado CD. Se ha determinado la longitud del segmento y el ángulo de inclinación al plano V.

En la fig. 219 se muestra la resolución de este problema por el método de giro. El giro se ha efectuado alrededor de un eje trazado por el punto A del segmento AB que se ha llevado a una posición paralela al plano V. Se ha determinado la longitud del segmento y el ángulo de inclinación al plano H.

5. Determinar la distancia de un punto a una recta. Dirijámonos a la fig. 228. En esta figura se muestra el giro del plano determinado por el punto K y la recta AB, alrededor de la horizontal KD de este plano. Como resultado del giro el plano se sitúa paralelamente al plano H. Ahora (fig. 235) se puede trazar la perpendicular kl: el segmento kl determina la distancia buscada desde el punto K hasta la recta AB.

En la fig. 236 se muestra la resolución del mismo problema girando el sistema compuesto por el punto K y la recta AB alrededor de dos ejes: primeramente alrededor de un eje perpendicular al plano H y, luego, de otro perpendicular al plano V. Los ejes no se representan en el dibujo (véase el § 36). Puesto que durante el primer giro la proyección horizontal del sistema varía sólo su posición, permaneciendo invariable su configuración y su magnitud, entonces, trazando la perpendicular $k1$, construimos la proyección horizontal a_1b_1 en la posición requerida. Con ayuda de esta proyección hallamos la proyección frontal $a_1'b_1'2_1'k_1'$. Durante el segundo giro hay que conservar la configuración y la magnitud de esta proyección. «Fijamos» el punto k_1' a $a_1'b_1'$ con auxilio de la perpendicular $k_1'2_1'$ y construimos la proyección $a_2'b_2'2_2'k_2'$ y por ésta, la proyección k_2 del punto K y el punto con doble denotación (a_2 y b_2) que es la proyección del segmento AB. La distancia buscada del punto K a la recta AB se expresa por el segmento k_2a_2 (k_2b_2).

Fig. 235

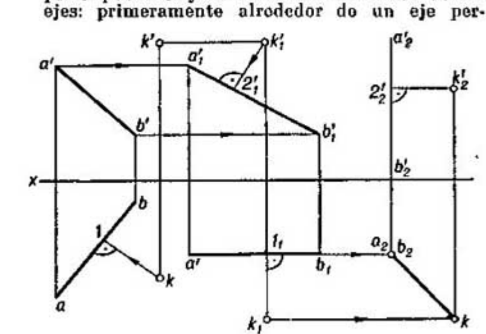


Fig. 236

6. Determinar la distancia desde un punto hasta un plano.

En la fig. 201 se muestra la resolución de este problema para el caso de un plano proyectante horizontal. La resolución se reduce al trazado de la perpendicular ak.

En la fig. 237 se expone la resolución de este mismo problema para el caso de un plano de posición general; a la izquierda el plano viene dado por un triángulo, a la derecha, por sus trazas. Se ha empleado el método de cambio de los planos de proyección; se ha introducido el plano complementario S perpendicular al plano H y al plano dado que, como resultado, se hace perpendicular al plano S (véanse las figs. 205 y 206 y las explicaciones a éstas). La distancia buscada se determina por la perpendicular trazada desde el punto k_s a la proyección b_sc_s (fig. 237, a la izquierda) y a la traza P_s (fig. 237, a la derecha).

7. Determinar la distancia entre dos planos paralelos.

La resolución de este problema se puede reducir a la determinación de la distancia de un punto, tomado en uno de los planos, al otro plano, o introducir

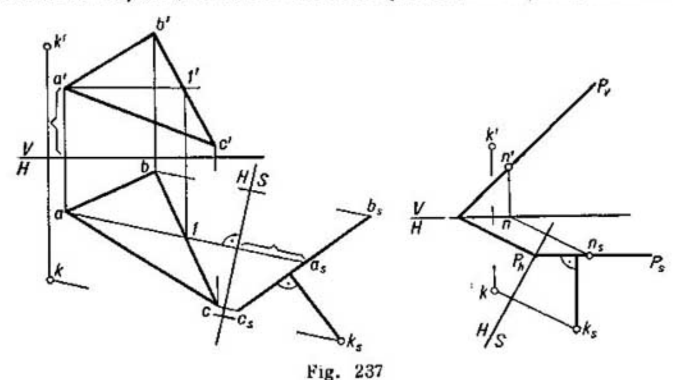


Fig. 237

en el sistema V, H un plano de proyección auxiliar perpendicular a los planos paralelos dados, como se ha hecho en la fig. 237 respecto a un plano.

8. Determinar la distancia entre dos rectas paralelas.

La resolución de este problema se puede reducir a la determinación de la distancia desde un punto, tomado en una de las rectas, hasta la otra recta (véanse las figs. 235 y 236).

En la fig. 238 se muestra la construcción en la que un plano determinado por dos rectas paralelas ha sido girado alrededor de una de sus horizontales (o una de sus frontales) de manera tal, que el plano y, por consiguiente, las rectas dadas se han situado paralelamente al plano de proyección.

El giro se ha efectuado alrededor de la horizontal KM. Basta hallar la nueva posición de aunque sea el punto A (en el plano horizontal, el punto a_1): la recta a_1k y la recta paralela a ésta, trazada por el punto m, representan las proyecciones horizontales de las rectas paralelas dadas, cuando el plano, determinado por éstas, está situado paralelamente al plano H.

En la fig. 239 se muestra la resolución del mismo problema por el método de cambio de los planos de proyección. Primeramente ambas rectas se han proyectado sobre el plano S paralelo a éstas (el plano S se ha trazado por una de las rectas, por la recta AB). Luego, las rectas se han proyectado sobre el plano T perpendicular a estas rectas. Las proyecciones de estas rectas sobre el plano T representan puntos. El segmento a_tc_t (o el b_td_t) determina la distancia buscada entre las rectas.

En la misma fig. 239 se muestran las proyecciones del segmento que determina la distancia entre las rectas dadas. La proyección sobre el plano S se ha

trazado por el punto b_s (se podría haber tomado otro punto cualquiera sobre a_sb_s) paralelamente al eje S/T, puesto que en el sistema S, T, la proyección sobre el plano T expresa la magnitud verdadera de la distancia entre AB y CD. Lo siguiente está claro del dibujo. La proyección sobre el plano T deberá ser mayor que cada una do las proyecciones b_se_s, be, $b'e'$.

9. Determinar la distancia más corta entre dos rectas que se cruzan y expresar mediante las proyecciones la perpendicular común a estas rectas.

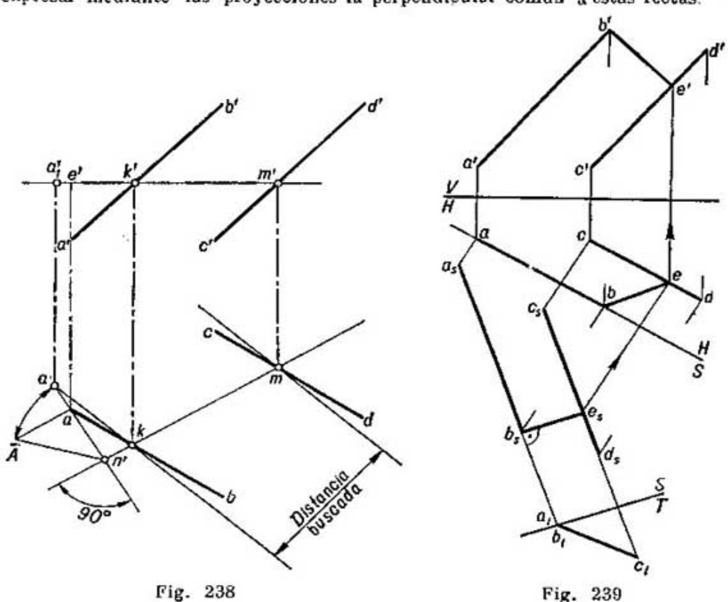


Fig. 238 Fig. 239

Les hacemos recordar que la distancia más corta entre dos rectas que se cruzan es al mismo tiempo la distancia entre los planos paralelos a los que pertenecen las rectas que se cruzan.

En la fig. 240 se muestra la perpendicular común a las rectas que se cruzan AB y CD.

Si se trazan por las rectas AB y CD dos planos paralelos entre sí P y Q y luego, por una de estas rectas, por ejemplo, por la AB, se traza un plano S perpendicular a P y a Q y se halla la recta según la cual se cortan los planos S y Q (esta recta MN es paralela a la recta AB), entonces, por el punto E de intersección de las rectas CD y MN pasará la perpendicular buscada a las rectas AB y CD.

En la construcción mostrada en la fig. 241, una de las rectas que se cruzan (la AB) se ha proyectado en un punto sobre el plano de proyección complementario T. Se ha efectuadc el siguiente plan de construcción:

a) Del sistema V, H se ha pasado al sistema S, H, donde $S \perp H$ y $S \parallel AB$.

b) Del sistema S, H se ha pasado al sistema S, T, donde $T \perp S$ y $T \perp AB$.

c) Una vez obtenida la proyección de la recta AB sobre el plano T en forma de un punto y la proyección de la segunda recta ($c_t d_t$) y trazado desde el punto $a_t(b_t)$ la perpendicular a $c_t d_t$, se ha hallado la distancia buscada entre las rectas dadas que se cruzan AB y CD.

Luego, en la fig. 241 se muestra la construcción de la proyección de la perpendicular común a AB y CD. La marcha de la construcción está indicada con flechas. La proyección $e_s f_s$ se ha trazado paralelamente al eje S/T.

10. Construir las proyecciones del segmento de una recta de posición general que forma con el plano H un ángulo α, y con el plano V, un ángulo β. Tal construcción ya se mostró en el § 13 (figs. 73 y 74), pero sin emplear los métodos expuestos en el capítulo V. Examinemos ahora la resolución del problema con auxilio del método de giro.

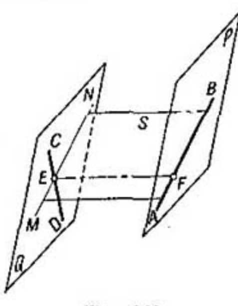


Fig. 240

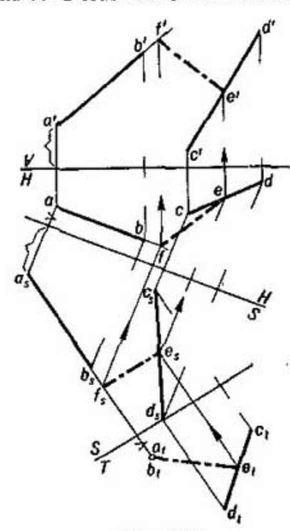


Fig. 241

Supongamos (fig. 242) que la recta ha de pasar por el punto A bajo un ángulo α al plano H y bajo un ángulo β al plano V. Es conocido (véase el § 13) que para una recta de posición general $\alpha + \beta < 90°$.

Por el punto A se han trazado dos rectas: una paralelamente al plano V y bajo un ángulo α al plano H, y la otra paralelamente al plano H y bajo un ángulo β al plano V. Sobre ambas rectas se han llevado segmentos iguales: $a'b_1' = ab_2$. Giremos el segmento AB_1 alrededor de un eje perpendicular al plano H, y el segmento AB_2 alrededor de un eje perpendicular al plano V, con la particularidad de que ambos ejes pasan por el punto A (lo que permite conservar este punto en su posición dada). En cierto momento ambos segmentos coincidirán (en la fig. 242 esto se muestra en forma del segmento AB) y, por consiguiente, queda construida la recta buscada. Por el punto A se pueden trazar en total cuatro rectas semejantes.

11. Construir un plano de posición general que pase por el punto A y que esté situado bajo ángulos dados a los planos H y V.

En la pág. 105 se estableció la dependencia entre los ángulos formados por un plano de posición general con los planos H y V y los ángulos formados por la perpendicular a este plano con los mismos planos de proyección. A base de estas

dependencias, para construir un plano bajo los ángulos α_1 al plano H y β_1 al plano V hace falta construir previamente una recta bajo el ángulo $\alpha=90°-\alpha_1$ al plano H y $\beta=90°-\beta_1$ al plano V (véase el problema 10), y, luego, trazar por el punto A un plano perpendicular a la recta construida[1].

12. Girar un plano de posición general, dado por el triángulo ABC (fig. 243), alrededor de un eje vertical dado de manera tal, que este plano pase por el punto dado K. Si el plano pasa por el punto K, este último se encontrará sobre el plano en una de sus horizontales. Se puede enseguida indicar la horizontal que después del giro del plano deberá pasar por el punto K: para ello basta trazar la proyección frontal de la horizontal por el punto k'. Una vez construida la proyección horizontal de la horizontal (mn) y determinado el radio de giro (od), trazamos una circunferencia respecto a la cual, durante el giro del plano alrededor del eje dado, la proyección horizontal de la horizontal será tangente en cualquier posición. Si trazamos ahora desde el punto k una tangente a esta circunferencia (kd_1), entonces, podemos considerarla como

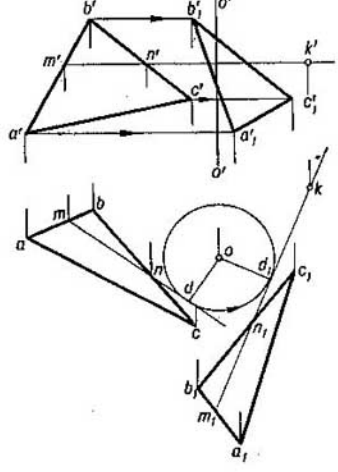


Fig. 242

Fig. 243

la proyección horizontal de la horizontal, sobre la cual deberá encontrarse el punto K, cuando el plano pase por este punto.

Construida la proyección horizontal de la horizontal después del giro (m_1n_1), construimos la proyección horizontal del triángulo: ésta varía solamente su posición, permaneciendo invariable su forma y magnitud $(a_1b_1c_1=abc)$. Con ayuda de la proyección $a_1b_1c_1$ hallamos la proyección $a_1'b_1'c_1'$.

Nos limitamos a una sola solución. La segunda solución se obtendrá si se traza desde el punto k una segunda tangente.

El problema que acabamos de examinar puede ser modificado de la manera siguiente: girar el plano de posición general alrededor de cierto eje vertical de tal manera que el punto dado pertenezca a este plano.

Este problema se diferencia del anterior solamente en que el eje de giro debe ser elegido por nosotros mismos. ¿Puede ser elegido este eje arbitrariamente?

Resulta que *no toda* recta perpendicular al plano H puede ser tomada como eje de giro útil para la resolución del problema dado.

[1] Es evidente, que construyendo la recta tal como fue indicado en el § 13, podemos trazar un plano perpendicular a esta recta, que será el plano buscado.

De la fig. 243 se desprende que la proyección horizontal del eje de giro debe estar situada de tal manera que, respecto a las proyecciones horizontales del punto K y de la horizontal MN, la circunferencia de centro o, a la cual es tangente la recta mn, no contenga dentro de sí al punto k, puesto que desde el punto k se debe trazar una tangente a esta circunferencia.

Por tanto, la distancia del punto buscado o al punto k deberá ser no menor que la distancia desde este mismo punto o a la recta mn. Si tomamos el punto o de tal manera que ambas distancias sean iguales (por ejemplo, en el punto o_1 o en el o_2 en la fig. 244), en él se puede disponer el eje de giro.

¿Dónde se situarán en el dibujo los puntos equidistantes del punto k y de la recta mn? Es conocido que estos puntos están situados sobre una línea curva, una *parábola* cuyo foco se encuentra en el punto k y como cuya directriz sirve la recta mn. Los puntos interiores a esta parábola se encuentran más

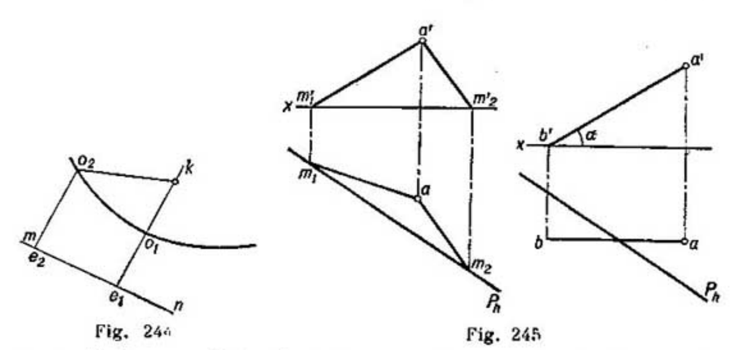


Fig. 244 Fig. 245

cerca del foco que de la directriz y no sirven en calidad de proyección horizontal del eje de giro; los puntos que se encuentran en la propia parábola o exteriores a ésta pueden ser elegidos como tal proyección.

13. Por un punto, perteneciente a cierto plano, trazar en este plano una recta bajo un ángulo dado α al plano H.

Supongamos que el plano (designémoslo por P) está dado por dos rectas que se cortan (fig. 245, a la izquierda) y que la recta buscada ha de trazarse por el punto A de intersección de estas rectas.

Hallemos la traza horizontal del plano P. Para ello se ha trazado el eje de proyección x y se han hallado las trazas horizontales de ambas rectas que determinan al plano P. Por estas trazas pasa la traza P_h. Si la recta buscada AB fuese paralela al plano V, el ángulo entre la proyección $a'b'$ y el eje de proyección sería igual al ángulo formado por esta recta con el plano H. Por eso, por el punto a' (fig. 245, a la derecha) hay que trazar una recta bajo el ángulo dado α al eje de proyección. El punto b' sobre esta recta puede ser tomado arbitrariamente; para simplificar la construcción se ha tomado sobre el eje x. Luego, se ha construido la proyección horizontal ab que corresponde al segmento obtenido $a'b'$. La proyección ab debe ser paralela al eje de proyección, puesto que la recta se ha colocado paralelamente al plano V.

La recta construida ($a'b'$, ab) satisface una condición: ha sido trazada bajo el ángulo dado α al plano H, pero no cumple la otra: no pertenece al plano dado Para que la recta AB pertenezca al plano P y al mismo tiempo se conserve el ángulo α invariable, hace falta girarla alrededor de un eje perpendicular al

plano H. Dado que el punto A se encuentra en el plano P, hay que tomar el eje de giro que pase por el punto A (fig. 246); durante este giro, el punto B se desplazará por el plano H, y en el momento en que AB entra en el plano P, el punto B se encontrará en la traza P_h de este plano. Por esta razón, girando la recta ab alrededor del punto o (a), «llevamos» el punto b sobre la traza P_h, y con auxilio de la nueva posición hallada de la proyección horizontal hallamos la nueva posición de la proyección sobre el plano V. El problema, como se ve de la fig. 246, tiene dos respuestas, y su resolución es posible si el ángulo dado α no es mayor que el ángulo de inclinación del propio plano P al plano H. Si estos ángulos son iguales entre sí, se obtiene una sola respuesta.

14. Hallar la magnitud verdadera de un ángulo plano.

La resolución de este problema puede verse en las figs. 203 y 210, en las que la construcción se ha cumplido con ayuda del método de cambio de los planos de proyección (el triángulo se ha proyectado sobre un plano de proyección complementario, paralelo a este triángulo, con lo cual se han determinado los ángulos del mismo). A continuación se puede observar la determinación de la magnitud verdadera del ángulo plano con ayuda del método de giro en las figs. 223 y 227 y en las figs. 230 y 234, donde al abatir el plano sobre el respectivo plano de proyección se ha hallado la magnitud verdadera del ángulo entre las trazas del plano en el primer cuadrante.

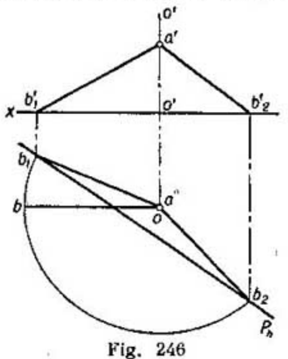


Fig. 246

15. Dividir un ángulo plano por la mitad. La cuestión sobre la construcción de la bisectriz del ángulo en el dibujo fue tratada en el § 15: se examinaron los casos de representación del ángulo, cuando el trazado de la bisectriz del ángulo de la proyección correspondía a la división del ángulo por la mitad en el espacio. Ahora se examina el caso general. La resolución se muestra en la fig. 247.

El plano, determinado por los lados del ángulo dado, debe ser situado paralelamente a uno de los planos de proyección; en este caso, el ángulo se representará en su proyección sobre este plano en verdadera magnitud y podrá ser dividido por la mitad. En la fig. 247 el plano del ángulo se ha girado hasta ocupar una posición paralela al plano H. Para obtener esta posición se ha trazado la horizontal AC. El giro del triángulo ABC alrededor de la horizontal AC se reduce al giro de uno de sus vértices, del punto B. El centro de giro se obtiene en el punto O (sus proyecciones son o', o); la magnitud verdadera del radio de giro R_B se obtiene al construir el triángulo rectángulo $ob\overline{B}$, en el que el cateto ob representa la proyección horizontal del radio de giro, y el cateto $b\overline{B}$ es igual al segmento $b'1$.

El punto b_1 se une con los puntos a y c, o sea, con las proyecciones horizontales de los puntos situados en el eje de giro y pertenecientes a los lados del ángulo. La nueva proyección horizontal, o sea, el ángulo ab_1c, igual al ángulo dado ABC, se divide por la mitad y se obtiene el punto d en la proyección horizontal de la horizontal y, luego, su correspondiente proyección d' en la recta $a'c'$. Estos puntos d y d' representan las proyecciones del punto situado sobre el eje de giro AC y, por consiguiente, «fijo». Las rectas $b'd'$ y bd son las proyecciones de la bisectriz buscada del ángulo.

16. Hallar la magnitud verdadera del ángulo entre una recta y un plano.

En las figs. 202 y 219 se muestra la determinación de la magnitud del ángulo formado por una recta de posición general con los planos de proyección.

Examinemos ahora la resolución del problema para el caso de un plano de posición general.

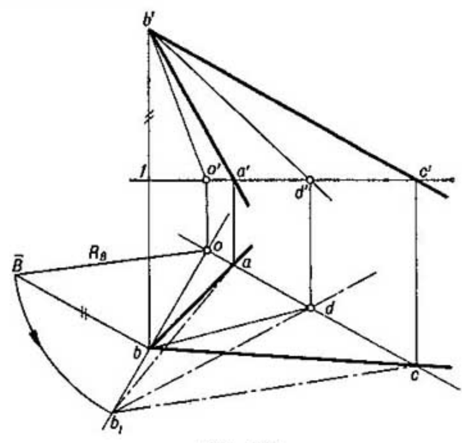


Fig. 247

Si hay que determinar solamente la magnitud del ángulo entre la recta y el plano, entonces no es obligatorio construir las proyecciones de este ángulo [1]. Efectivamente, la magnitud del ángulo formado por la recta AB con el plano P (fig. 248) puede ser hallada construyendo el ángulo β y determinando su magnitud: el ángulo buscado $\alpha = 90° - \beta$. En este caso se simplifica considerablemente la resolución del problema, puesto que se hacen innecesarias todas las construcciones relacionadas con la determinación de los puntos D y a_p.

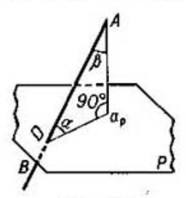


Fig. 248

La construcción se da en la fig. 249. Trazando desde el punto A de la recta AB una perpendicular al plano P, construimos las proyecciones del ángulo complementario al ángulo buscado de la recta AB con el plano P hasta 90°. Trazamos la horizontal CB y girando alrededor de ésta el plano, determinado por el ángulo CAB, lo llevamos a una posición paralela al plano H. La nueva proyección ho-

[1] Sobre la construcción de las proyecciones del ángulo entre una recta y un plano véase el § 31, pág. 108.

rizontal $\angle ca_1b = \angle CAB$. Ahora no hay más que construir el ángulo que complementa al ca_1b hasta 90°; en la fig. 249 éste es el ángulo α, igual al ángulo buscado entre la recta AB y el plano.

Si el plano está dado no por sus trazas, sino, por ejemplo, por un triángulo, entonces, para trazar la perpendicular a este plano hace falta construir en el triángulo la horizontal o la frontal (véase el § 29.)

17. Determinar la magnitud verdadera del ángulo entre dos planos.

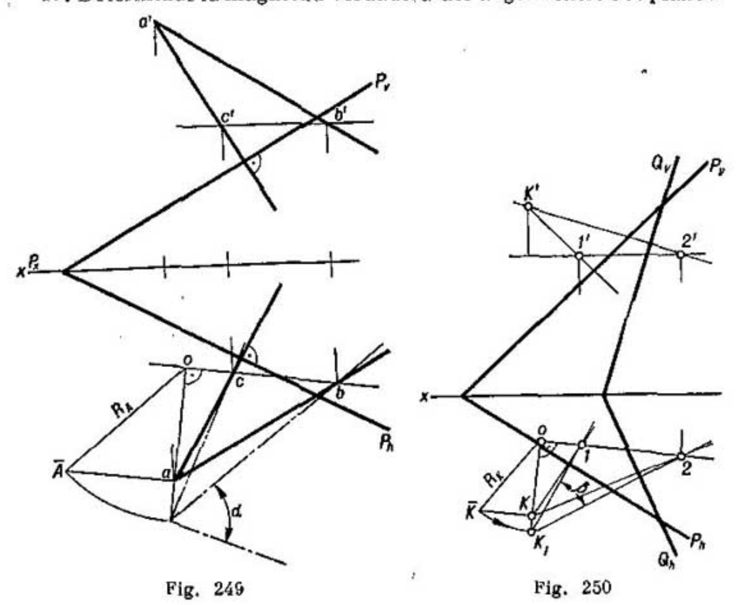


Fig. 249 Fig. 250

En la fig. 250 se muestra la resolución de este problema sin construir las proyecciones del ángulo lineal que mide al ángulo diedro formado por los planos P y Q [1]. Tal resolución es sobre todo cómoda cuando los planos están dados por sus trazas.

Si trazamos desde cierto punto las perpendiculares a las caras del ángulo diedro, el ángulo lineal buscado será igual a la diferencia entre el ángulo de 180° y el ángulo formado por estas perpendiculares. En la fig. 250, para determinar el ángulo de dos planos P y Q se han efectuado las construcciones siguientes:

[1] Sobre la construcción de las proyecciones del ángulo lineal en un ángulo diedro véase el § 31, pág. 108.

a) desde cierto punto K se han trazado las perpendiculares: una al plano P y otra al plano Q;

b) valiéndonos del giro alrededor de la horizontal, el ángulo formado por las perpendiculares se ha colocado paralelamente al plano H.

El ángulo buscado de los planos P y Q es igual al ángulo hallado β o (si β es un ángulo obtuso) a la diferencia entre el ángulo de 180° y el ángulo hallado.

En la fig. 251 se da la resolución de este mismo problema con ayuda del método de cambio de los planos de proyección. Se ha determinado la magnitud del ángulo diedro formado por las caras de los triángulos ABC y ABD. Como arista sirve el segmento AB. Si AB es perpendicular al plano de proyección complementario, ambas caras se proyectan sobre este plano en forma de segmentos, el ángulo entre los cuales es igual al ángulo lineal del ángulo diedro dado (fig. 252).

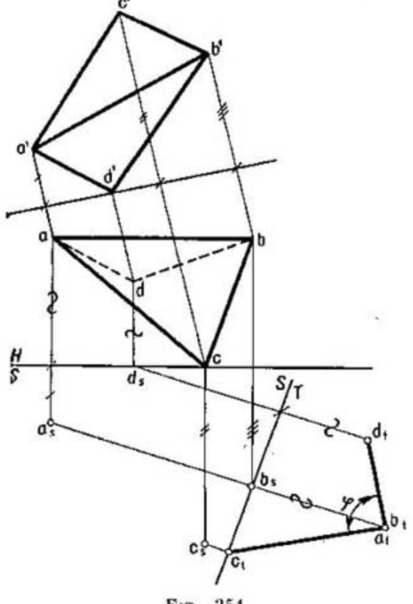


Fig. 251

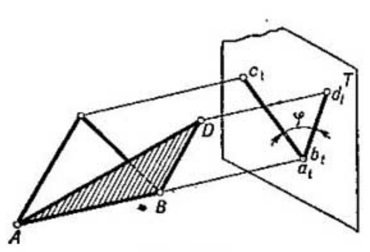


Fig. 252

La construcción en la fig. 251 se ha efectuado por el esquema siguiente: del sistema V, H se ha pasado al sistema S, H, donde $S \perp H$ y $S \| AB$, y luego, al sistema S, T, en el que $T \perp S$ y $T \perp AB$. Sobre el plano S se muestran solamente las proyecciones de los puntos A, B, C y D; las caras ABC y ABD no se han dibujado.

La determinación de la magnitud verdadera de los ángulos formados por un plano de posición general con los planos de proyección H y V con ayuda del

método de cambio de los planos de proyección ya se mostró en las figs. 205, 206 y 207, y en la fig. 221, con ayuda del método de giro (el ángulo con el plano V).

18. Determinar la forma verdadera de un triángulo.

La resolución de este problema con ayuda del método de cambio de los planos de proyección se puede hallar en las figs. 203 y 210, y en las figs. 223 y 227, con auxilio del método de giro.

19. Girar un punto A alrededor de un eje MN un ángulo α en sentido de las agujas del reloj, si se mira desde M a N (fig. 253).

La construcción se ha cumplido con ayuda del método de cambio de los planos de proyección. Formando consecutivamente nuevos sistemas de planos de proyección por el esquema: del sistema V, H al sistema S, H, donde $S \perp H$ y $S \parallel MN$, y, por fin, al sistema S, T, en el que $T \perp S$ y $T \perp MN$, obtenemos una posición recíprocamente paralela entre el plano de giro del punto A y el plano de proyección T. En relación con esto, el giro del punto A se representa como el giro de la proyección a_t en un ángulo dado alrededor del centro m_t (n_t) en sentido de las agujas del reloj (puesto que según la condición del problema, para determinar el sentido de giro hay que mirar desde el punto M al punto N). Luego, obtenemos la proyección a_{1s} sobre la recta trazada por a_s perpendicularmente a $m_s n_s$ y, a continuación, las proyecciones a_1 y a'_1, lo que corresponde al desplazamiento del punto A a la posición A_1.

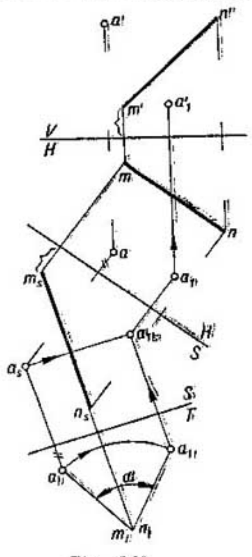


Fig. 253

20. Construir las proyecciones de una circunferencia dada por su diámetro y situada en un plano de posición general.

La resolución se da en la fig. 254. Para mayor claridad, la construcción se ha efectuado por etapas. Se ha empleado el método de giro.

Supongamos que el plano (designémoslo con P) en el que está situada la circunferencia está dado por su horizontal con las proyecciones $c'h'$ y ch y por su frontal cuyas proyecciones son $c'f'$ y cf. La circunferencia tiene como centro el punto C.

En la primera posición (fig. 254, a la izquierda) fijamos el eje x, y hallando la traza horizontal de la frontal CF (el punto M), trazamos la traza P_h paralelamente a la proyección ch de la horizontal. Sobre el plano H hallamos la posición abatida del centro C (el punto C_0) y contruimos en el plano H una circunferencia de radio dado y con centro en este punto.

Las proyecciones buscadas de la circunferencia son elipses. En la fig. 254 se muestra la construcción de los ejes de estas elipses para cada una de las proyecciones de la circunferencia.

Para la elipse que representa la proyección horizontal de la circunferencia, el eje mayor está situado sobre la proyección horizontal de la horizontal, con la particularidad (véase la fig. 254, en el centro) de que $c3 = c4 =$ al radio de la circunferencia, y el eje menor se ha obtenido con ayuda del diámetro $3_0 4_0$ paralelo a la traza P_h, y el diámetro $1_0 2_0$ perpendicular a esta misma traza; el punto 2 se ha obtenido con auxilio de la recta $3_0 k_1$, y el punto 1 en la misma proyección puede ser construido a base de que $c2 = c1$.

En la fig. 254, a la derecha, se muestra que para la proyección frontal, el eje mayor $7'8'$ se encuentra en la proyección frontal de la frontal; a partir del punto c' se han trazado los segmentos $c'7'$ y $c'8'$ iguales al radio de la circunfe-

rencia. El eje $7'8'$ corresponde al diámetro $7_0 8_0$ de la circunferencia, situado sobre la frontal MF abatida sobre el plano H.

El eje menor $5'6'$ en la proyección frontal se ha trazado perpendicularmente a $7'8'$. El punto $5'$ se ha construido con auxilio del punto 5_0 del diámetro $5_0 6_0$ de la circunferencia, trazado perpendicularmente al diámetro $7_0 8_0$ y prolongado hasta su intersección con la traza P_h en el punto $k3$; en la recta auxiliar ck_3 sobre la proyección horizontal hallamos la proyección 5 y con su ayuda construimos el punto $5'$. Trazando el segmento $c'6'$ igual al segmento $c'5'$ obtenemos la proyección del eje menor $5'6'$.

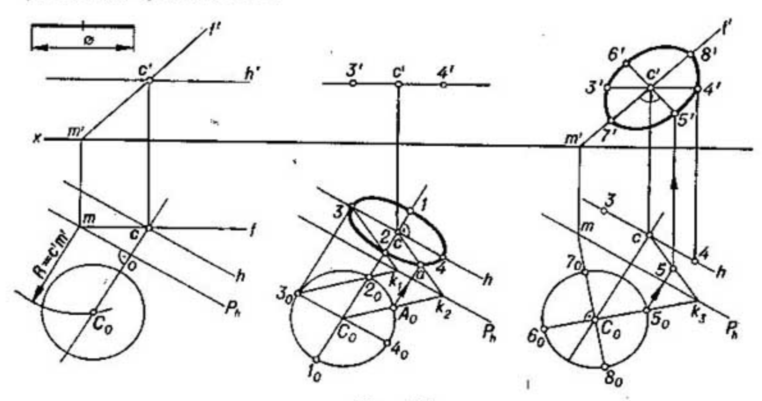


Fig. 254

Una vez construidos ambos ejes de las elipses se puede pasar a la construcción de las propias elipses por puntos. Estos puntos pueden ser obtenidos así como se muestra en la fig. 254 (en el centro) para el punto A; la construcción de las proyecciones a y a' es análoga a la construcción indicada más arriba de los puntos 5 y $5'$.

21. Construir la proyección frontal de un ángulo cuya magnitud verdadera es igual a su proyección horizontal.

En el § 15 se estableció que las proyecciones de un ángulo agudo (u obtuso) situado en un plano de posición general, pueden ser iguales al ángulo proyectado.

Supongamos (fig. 255) que el ángulo *akb* es la proyección horizontal del ángulo α. Trazando la recta *ab*, la traza horizontal del plano en el que está situado el ángulo que se examina, giramos alrededor de esta recta el punto K hasta abatirlo sobre el plano H. Si se traza una circunferencia por los puntos a, b y k, entonces, cualquier ángulo inscrito en esta circunferencia y que abarca el arco *acb*, es igual a α, incluyendo el ángulo aK_0b. Evidentemente, el punto K_0 es el punto K abatido sobre el plano H, o sea, el vértice del ángulo AKB. El punto K_0 se obtiene en la intersección del arco tra-

zado por los puntos a, b y k con la traza S_h del plano de giro del punto K. El segmento oK_0 es el radio de giro del punto K. Trazando la perpendicular desde el punto k a ok e intersecando esta perpendicular con el arco de radio oK_0 obtenemos el punto $\overline{K}$ y el segmento

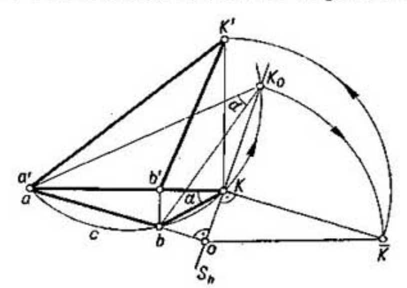


Fig. 255

$k\overline{K}$ que representa la distancia del punto K al plano H, es decir, la distancia de la proyección k' al eje x. El ángulo $a'k'b'$ representa la proyección frontal buscada del ángulo AKB, igual a su proyección horizontal akb.

En el presente parágrafo y en otros anteriores se examinaron problemas en los que había que determinar los elementos comunes de distintas figuras geométricas (por ejemplo, la construcción del punto de intersección de una recta con un plano o el primer problema del presente parágrafo).

A tales problemas se les suele llamar «de posición». A estos problemas se contraponen los problemas llamados métricos, en los cuales se determinan las longitudes de los segmentos, los ángulos, las áreas, etc.

PREGUNTAS AL § 38

1. ¿En cuál sucesión hay que tomar los ejes de giro para disponer una recta de posición general, girándola alrededor de estos ejes, perpendicularmente al plano H? al plano V?
2. ¿Cómo determinar la magnitud verdadera de un segmento de una recta de posición general y sus ángulos con los planos H y V?
3. ¿Cómo determinar la distancia de un punto a una recta de posición general?
4. ¿Cómo determinar la distancia de un punto a un plano de posición general? a un plano de perfil?
5. ¿Cómo determinar la distancia entre dos planos paralelos? entre dos rectas paralelas? entre dos rectas que se cruzan?

6. ¿Se puede con ayuda del método de giro construir las proyecciones del segmento de una recta de posición general según los ángulos de inclinación de esta recta a los planos *H* y *V*? Si esto es posible, ¿cómo hacerlo?

7. ¿Qué representa la parábola construida en la fig. 244?

8. ¿Cómo hallar la magnitud verdadera de un ángulo plano?

9. ¿Cómo construir en el dibujo la bisectriz de un ángulo?

10. ¿Cómo hallar la magnitud verdadera del ángulo de una recta con un plano?

11. ¿Cómo hallar la magnitud verdadera del ángulo formado por dos planos?

12. ¿Cómo construir las proyecciones de una circunferencia situada en un plano de posición general?

VI

CAPÍTULO

REPRESENTACIÓN DE POLIEDROS

§ 39. CONSTRUCCIÓN DE LAS PROYECCIONES DE LOS POLIEDROS

La construcción de las proyecciones de los poliedros sobre cierto plano se reduce a la construcción de las proyecciones de puntos. Por ejemplo, al proyectar la pirámide $SABC$ sobre el plano V (fig. 256, a la izquierda), construimos las proyecciones de los vértices S, A, B y C y, como resultado, las proyecciones de la base ABC, de las caras SAB, SBC y SAC, y de las aristas SA, SB y otras.

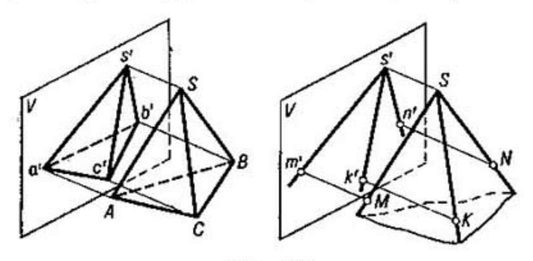


Fig. 256

De manera análoga, al proyectar un ángulo triédrico[1] con vértice S (fig. 256, a la derecha), además del vértice S, tomamos en cada arista del ángulo un punto (K, M, N) y los proyectamos sobre el plano V; como resultado obtenemos las proyecciones de las aristas y las caras (los ángulos planos) del ángulo triédrico y, en total, del propio ángulo.

[1] En el caso dado convexo, es decir, tal, que todo está situado a un mismo lado del plano de cada una de sus caras, prolongado ilimitadamente.

En la fig. 257 está representado un cuerpo poliédrico $ACBB_1D...$ (es decir, una parte del espacio delimitada por todos lados por figuras planas, por polígonos) y su proyección sobre el plano H, la figura $acf_1e_1d_1def$. Todo punto situado dentro del contorno de esta figura (es decir, de la línea que la delimita) es la proyección de dos puntos, por lo menos, de la superficie de este cuerpo. Por ejemplo, el punto con doble denotación m y n sirve de proyección de los puntos M y N situados en una recta proyectante común para ellos.

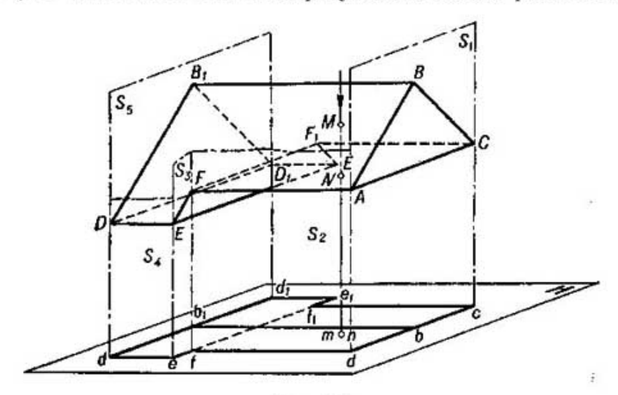


Fig. 257

El punto situado en el contorno de la proyección, es la proyección de un punto (por ejemplo, a es la proyección del punto A), o de unos cuantos y, a veces, de todo un conjunto de puntos (por ejemplo, b es la proyección no sólo del punto B, sino que también de todo un conjunto de puntos de la cara ABC, situados sobre la recta proyectante Bb).

Las rectas proyectantes que pasan por todos los puntos del contorno de la proyección, forman en conjunto una *superficie proyectante*, dentro de la cual, en contacto con ésta, se encuentra el cuerpo dado. Para el cuerpo representado en la fig. 257, la superficie proyectante consta de los planos S_1, S_2, S_3, etc. La línea de contacto de la superficie proyectante con el cuerpo se llama *contorno del cuerpo* respecto al plano de proyección elegido. En la fig. 257 como tal contorno sirve la línea quebrada $ACF_1E_1D_1DEFA$ [1].

[1] Podríamos considerar que, en el caso dado, también todos los puntos de los segmentos AB, BC, DB_1, B_1D_1, EF y E_1F_1 e incluso las áreas de los triángulos ABC y DB_1D_1 y las partes del trapecio EFF_1E_1 pertenecen al contorno del cuerpo, puesto que los planos proyectantes S_1, S_3 y S_5 pasan respectivamente por estas figuras.

En la proyección paralela, la superficie proyectante, como fue indicado en el § 1, es una superficie cilíndrica. Si el contorno de un cuerpo respecto al plano de proyección contiene segmentos rectilíneos, entonces la superficie proyectante para cada uno de estos sectores se transforma en plana.

La recta bb_1 trazada en la proyección es la proyección de la arista BB_1, visible con respecto del plano H. Todas las aristas visibles del cuerpo deben ser trazadas obligatoriamente en la proyección de este cuerpo.

La proyección del segmento FF_1 se obtiene dentro del contorno de la proyección; se muestra con líneas de trazos, puesto que, según las condiciones de visibilidad, los puntos del segmento FF_1 al ser proyectados sobre el plano H están ocultos.

La construcción de la proyección de la *superficie de una cara* también se reduce a la construcción de las proyecciones de ciertos puntos y rectas de esta superficie. La proyección de una superficie que limita un cuerpo cualquiera, tiene el mismo contorno que la proyección de este cuerpo. En el caso de representación de una superficie que se extiende ilimitadamente se separa con líneas cierta parte de esta, con lo cual se establece el contorno aparente con respecto del plano de proyección.

§ 40. DIBUJOS DE PRISMAS Y PIRAMIDES

Supongamos que conocemos la forma y la posición de una figura obtenida intersecando todas las caras laterales de un prisma con un plano, y la dirección de las aristas del prisma (fig. 258). De este modo se define una superficie prismática. Cortando una superficie prismática con dos planos paralelos entre sí obtenemos las bases del prisma (fig. 258). Pueden ser dadas una de las bases del prisma y su altura o la longitud de la arista lateral, con lo cual queda determinado el prisma.

Al elegir la posición del prisma para su representación, es conveniente disponer sus bases paralelamente al plano de proyección.

¿Cuáles índices permiten establecer que en el dibujo dado está representado precisamente un prisma (o, en un caso particular, un paralelepípedo)? La presencia en el dibujo de solamente segmentos rectilíneos [1], con la particularidad de que éstos sirven de proyecciones de las aristas o de las caras, la presencia de paralelogramos o rectángulos como proyecciones de las caras laterales, y de cualquier polígono como proyección de la base.

Algunos ejemplos se dan en las figs. 258—260; aquí en el sistema V, H están representados un prisma triangular recto, un prisma cuadrangular oblicuo y un cubo (que es precisamente un cubo lo atesti-

[1] Condición común para todos los poliedros.

guan la igualdad de las aristas y el hecho de que todas las caras son rectangulares). Pero para el cuerpo representado en la fig. 261, a pesar de que existen algunos de los índices indicados más arriba,

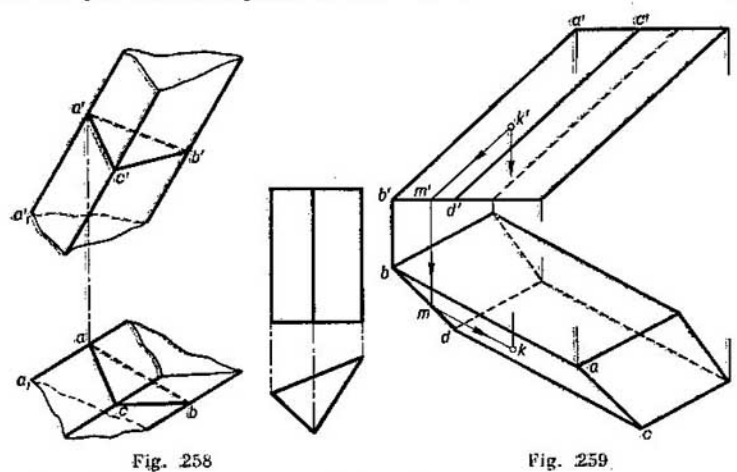


Fig. 258 Fig. 259

sería erróneo afirmar que es obligatoriamente un prisma o un paralelepípedo. En la fig. 261, a la derecha, se muestran todas las variantes posibles de solución de este problema. Evidentemente, en este caso, para que este problema estuviese claro deberíamos disponer de la proyección de perfil o de la denotación de los vértices.



Fig. 260

En la fig. 262 está representado un prisma cuadrangular irregular (sus bases son trapecios). En el dibujo superior de la fig. 263 se muestra la construcción de la proyección de perfil de este prisma empleando una recta auxiliar. En la misma figura (el dibujo inferior) se muestra la representación del prisma en los planos de coordenadas coincidentes con sus caras. En este caso, la tercera proyección se ha construido por las coordenadas de los vértices.

Para fijar la superficie de una pirámide hace falta conocer la figura obtenida como resultado del corte de todas las caras laterales de la pirámide por un plano y el punto de su intersección.

Habitualmente la pirámide se expresa en el dibujo con las proyecciones de su base y su vértice, y la pirámide truncada, con las proyecciones de ambas bases.

Al elegir la posición de la pirámide para su representación, es conveniente disponer su base paralelamente al plano de proyección. En la fig. 264 viene representada en el sistema V, H una pirámide triangular irregular cuya base es paralela al plano H [1]. El dibujo

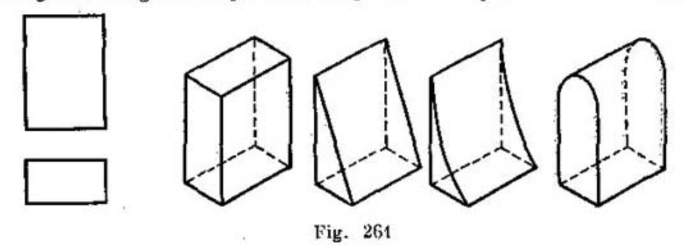


Fig. 261

da una representación clara de la forma de la base y de las caras laterales. Para la pirámide, en general, son suficientes dos proyecciones con la condición de que en una de ellas se muestra la forma de la

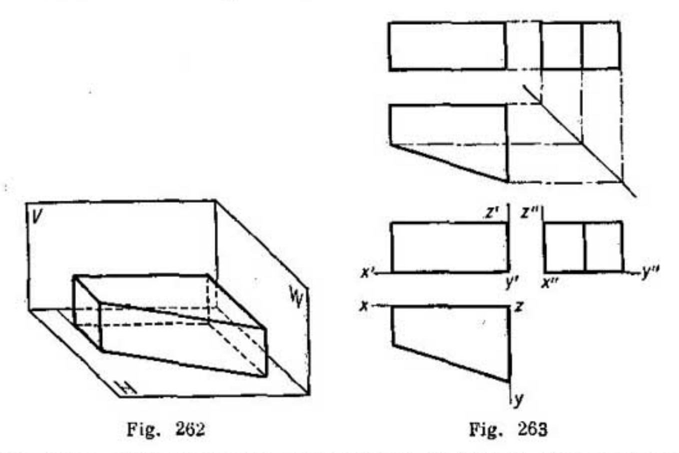


Fig. 262 Fig. 263

base. Pero, para el cuerpo representado en la fig. 265, a pesar de muchos índices que nos recuerdan una pirámide, sería erróneo afirmar que es obligatoriamente una pirámide. Aquí, en el sistema V, H,

[1] A la pirámide triangular se la llama también tetraedro (de la palabra griega tetra, que significa cuatro, y hedra, lado). La palabra «tetraedro» se emplea como denominación general de las pirámides triangulares. Pero, se llama también tetraedro a un cuadrilátero regular.

no está clara la línea situada en el plano de perfil. Esta línea puede ser curva, y, por consiguiente, las caras en las que esta línea figura, no serán figuras planas (fig. 265, a la derecha). Evidentemente, el problema de si es el cuerpo dado una pirámide o no, podría resolverse con ayuda de la proyección de perfil.

En la fig. 266 se muestra cómo, por ejemplo, pueden ser tomados los ejes de coordenadas para la pirámide dada. El eje z se ha dirigido según la altura de la pirámide, el plano de coordenadas xOy se ha hecho coincidir con la base de la pirámide. Para los ejes de coordenadas se han dado sus proyecciones. Con tal disposición de los ejes, el vértice S queda determinado con una sola coordenada, con la Z-coordenada.

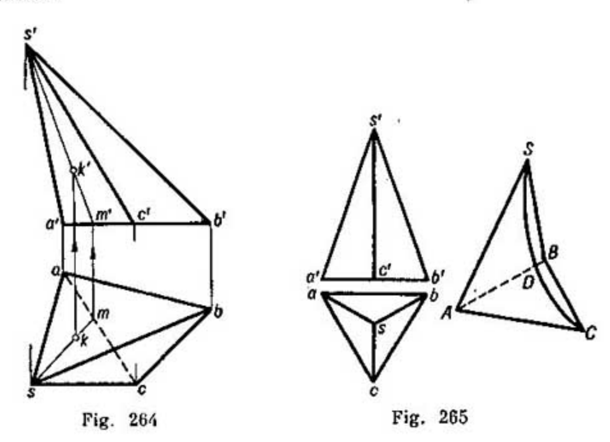


Fig. 264 Fig. 265

Si hay que construir en ambas proyecciones del poliedro un punto perteneciente a una de sus caras, se debe «enlazar» este punto con la cara correspondiente mediante una recta cualquiera.

En la fig. 259 el punto K ha sido construido sobre la cara $ABDC$ con auxilio de la recta KM. Supongamos, por ejemplo, que por la proyección frontal dada k' del punto K se exige hallar su proyección horizontal, con la particularidad de que el punto K debe estar situado en la cara $ABCD$. En este caso, primeramente se construye la proyección frontal del segmento de la recta auxiliar ($k'm'$) y luego la proyección horizontal de este segmento y sobre ésta se determina la proyección horizontal del punto K. Dado que el segmento $k'm' \| a'b'$, entonces, también $km \| ab$.

En la fig. 264 se muestra la construcción del punto K sobre la cara SAC con ayuda de una recta trazada por el vértice de la pirá-

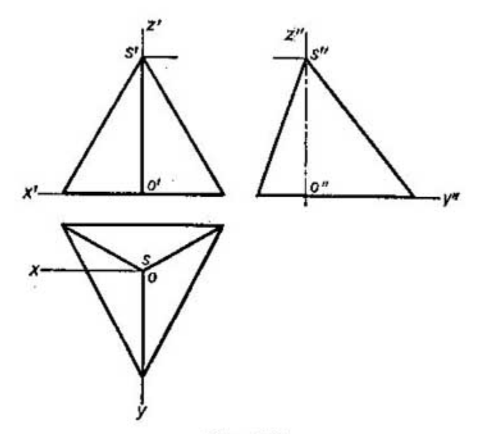


Fig. 266

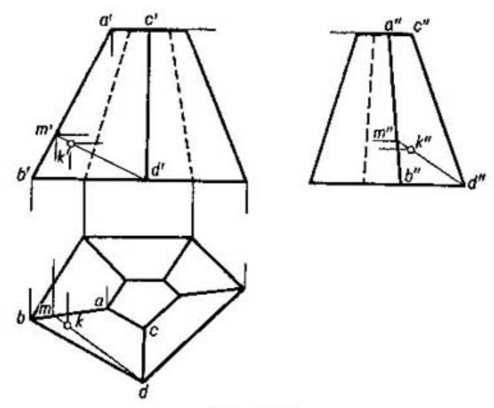


Fig. 267

mide. Si viene dada la proyección horizontal k del punto K y hay que hallar la proyección k', entonces, se debe construir primeramente el segmento sm. Luego hallar el punto m' con auxilio del punto m, obtener el segmento $s'm'$ y sobre éste, la proyección buscada k'.

En la fig. 267 se da una pirámide truncada pentagonal y se muestra la construcción del punto K sobre la cara $ABDC$ con ayuda de la proyección dada k y el segmento de la recta DM.

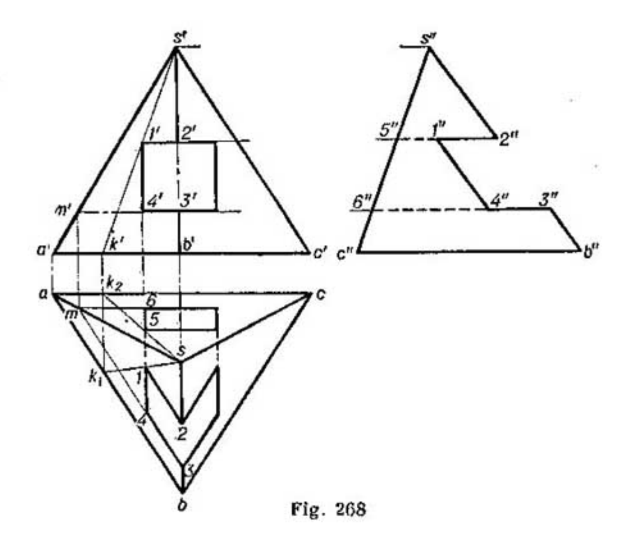


Fig. 268

La elección de la recta auxiliar para la construcción de un punto sobre una cara es, en general, arbitraria; hay que hacer todo lo posible para que las construcciones sean lo más simples posible.

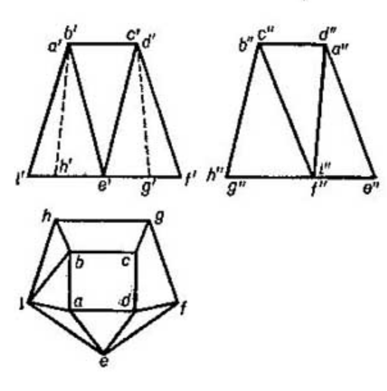


Fig. 269

En la fig. 268 viene representado un cuerpo en forma de pirámide triangular regular con un orificio prismático en él. La construcción se ha efectuado con ayuda de la proyección frontal del plano dado. En el dibujo se muestra la construcción de los puntos *1* y *5* (sobre la proyección horizontal) con auxilio de rectas trazadas por el vértice *S*. Los puntos *3*, *4* y *6* (sobre la proyección horizontal) se han hallado con auxilio de rectas que pasan por las caras *SAB* y *SAC* paralelamente al plano *H*; las proyecciones horizontales de estas rectas pasan por el punto *m* paralelamente a *ab* y a *ac*. El punto *2* puede ser

hallado, en este caso, o bien análogamente al punto *3*, o bien con ayuda de las proyecciones sobre el plano *W*.

En la fig. 269 se expone un ejemplo de un poliedro llamado prismatoide. En tal poliedro, las bases paralelas representan polígonos con un número arbitrario de lados, y sus caras, triángulos o trapecios (en la fig. 269, por ejemplo, el triángulo *ADE* y el trapecio *BHGC*).

§ 41. SISTEMA DE DISPOSICIÓN DE LAS REPRESENTACIONES EN LOS DIBUJOS TÉCNICOS

Como base de la construcción de los dibujos técnicos se ha tomado la proyección rectangular; ésta garantiza la representación en el dibujo de la forma y las dimensiones de los objetos proyectados sin desfiguración.

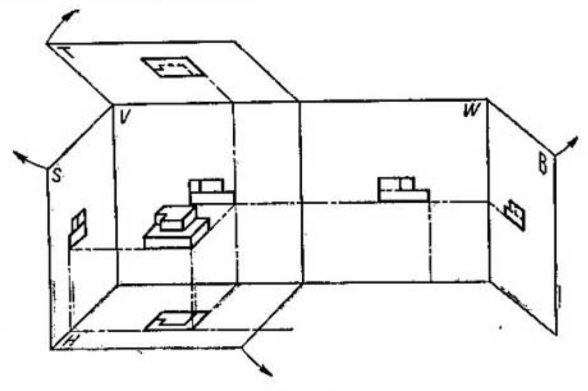


Fig. 270

Las proyecciones dispuestas normalmente, en su conjunto, garantizan la representación de la forma del objeto y su disposición en el espacio. Cada proyección representa una imagen (fig. 270) correspondiente a una dirección determinada de la vista.

En los dibujos técnicos se emplean distintas, por su contenido, representaciones. Estas se dividen en *vistas*, *cortes* y *secciones*. Aquí examinaremos solamente las vistas.

La *vista* se define como la *representación de la parte de la superficie del objeto vista por el observador*. Por consiguiente, en la vista se refleja no todo el objeto dado, no todas sus caras, aristas, etc.,

sino que solamente las vistas por el observador. Mientras tanto, cada proyección refleja completamente el objeto que se representa. Por consiguiente, entra la proyección y la vista existe cierta diferencia: en la proyección se representa toda la superficie del objeto, mientras que en la vista, solamente la parte de esta superficie vista por el observador. Pero, como *en las vistas se admite indicar las partes ocultas de la superficie del objeto con líneas de trazos*, la diferencia entre la proyección y la vista desaparece. Por ejemplo, en las figs. 268 y 269 cada vista coincide con la proyección.

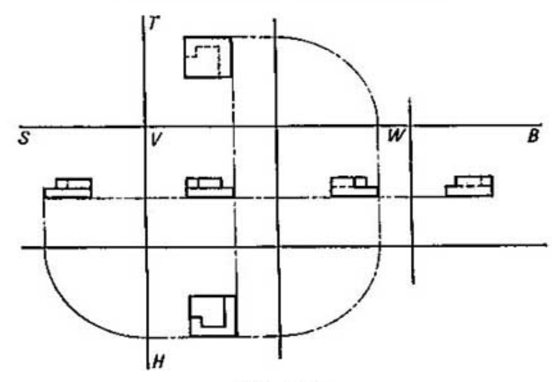


Fig. 271

En el § 5 (pág. 20) se dijo que en la práctica de ejecución de los dibujos de las máquinas y sus elementos se recurre a otros planos de proyección, además de los planos V, H y W. En la fig. 271 se muestran seis caras de un cubo, aceptadas como *planos fundamentales de proyección* y abatidas sobre el plano del dibujo como se desprende de la fig. 270. En el espacio $S \| W$, $T \| H$ y $B \| V$. Con relación a cada uno de los planos B, T y S, el observador debe ocupar la misma posición que ocupa respecto de los planos V, H y W, es decir, una posición tal, que el objeto se encuentre entre el observador y el plano de proyección correspondiente.

Como resultado se obtiene la disposición de las *vistas principales* indicada en la fig. 271. Estas vistas se llaman: *vista anterior* (sobre el plano V), *vista superior* (sobre el H), *vista por la izquierda* (sobre el W), *vista por la derecha* (sobre el S), *vista inferior* (sobre el T) y *vista posterior* (sobre el plano B). A la *vista anterior* se la llama también *vista principal*, puesto que la representación sobre el plano frontal de proyección se considera en los dibujos como principal.

La disposición recíproca de las vistas obtenida corresponde al sistema llamado *sistema del primer ángulo espacial* (primer diedro) o *europeo*. Este sistema se usa en la Unión Soviética al ejecutar dibujos en la construcción de maquinaria y en la construcción de aparatos de precisión, y en casi todos los países de Europa.

Además de este sistema existe el sistema del tercer ángulo espacial (tercer diedro), conocido también bajo el nombre de sistema norteamericano (se usa en E.E.U.U., Inglaterra, Países Bajos, Canadá y algunos otros países). En este sistema el plano de proyección se supone dispuesto entre el observador y el objeto. En la fig.

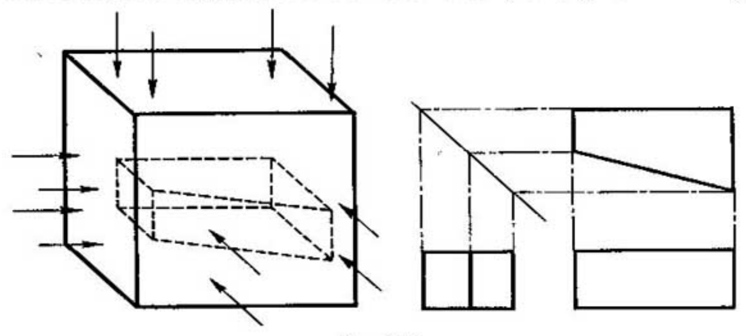


Fig. 272

272 (a la izquierda) el prisma está dispuesto tras el plano frontal y bajo el horizontal; se muestra también el plano de perfil de proyección (es decir, el prisma está situado en el séptimo octante). Con flechas se indica la dirección de la vista del observador; éste mira al objeto como si fuera a través de planos «de vidrio». La disposición de las vistas obtenida (en el caso dado, de la vista anterior, de la vista superior y de la vista por la izquierda) se muestra en la fig. 272, a la derecha: en la base del dibujo se encuentra la vista anterior (vista principal), así como en la fig. 271, pero la vista superior se encuentra por encima de la vista principal y la vista por la izquierda, no a la derecha (véase la fig. 268), sino que a la izquierda de la vista principal.

Ahora bien, al ejecutal los dibujos técnicos se emplean dos sistemas, que desde el punto de vista de la Geometría Descriptiva pueden ser relacionados con la disposición del objeto o bien en el primer cuadrante del espacio, o bien en el tercero. En la URSS, como ya se dijo más arriba, se ha aceptado el primer sistema, el sistema del primer ángulo espacial.

§ 42. INTERSECCIÓN DE LOS PRISMAS Y LAS PIRÁMIDES POR UN PLANO Y UNA RECTA

Para construir la figura que se obtiene al intersecar un prisma y una pirámide con un plano, hay que hallar los puntos en los cuales las aristas del prisma o de la pirámide cortan al plano dado, o hallar los segmentos de las rectas según las cuales el plano dado corta las caras del prisma o de la pirámide. En el primer caso, la construcción se reduce al problema de intersección de una recta con un plano, en el segundo caso, al problema de intersección de dos planos entre sí.

En los casos cuando el plano secante no es paralelo a ninguno de los planos de proyección, la figura del corte no se proyecta en verdadera magnitud. Por esta razón, si hay que determinar la forma verdadera de la figura de la sección [1], entonces, es necesario emplear uno de los procedimientos que permiten hallar la longitud de un segmento, la magnitud de un ángulo, etc. (véase el cap. V).

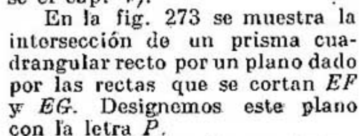


Fig. 273

En la fig. 273 se muestra la intersección de un prisma cuadrangular recto por un plano dado por las rectas que se cortan EF y EG. Designemos este plano con la letra P.

En la intersección se obtiene un cuadrilátero cuyos vértices representan los puntos de intersección de las aristas del prisma con el plano P. Dado que en este caso el prisma es recto y su base es paralela al plano H, la proyección horizontal de la figura de la sección se determina enseguida, sin construcciones cualesquiera: ella se superpone a la proyección *abcd*. Evidentemente, se pueden hallar los puntos K y L en los que el plano P corta las aristas del prisma que pasan por los puntos A y D, con ayuda de un solo plano S en el que se encuentra la cara del prisma $S \times P = 1-2$, de donde obtenemos los puntos k' y l'. Trazando el plano T, obtenemos $T \times P = 3-4$ y los puntos m y n.

---

[1] Emplearemos la expresión «forma verdadera de la sección» en el caso cuando la figura se da sin desfiguración.

Así pues, el procedimiento de construcción indicado en la fig. 273 se reduce al empleo de los planos auxiliares S y T, que pasan por las caras correspondientes del prisma, y a la construcción de los segmentos KL y MN según los cuales el plano P corta a estas caras.

En la proyección frontal, la línea de intersección consta de las partes vista y oculta; la parte vista de la línea de intersección está situada en las caras vistas por el observador.

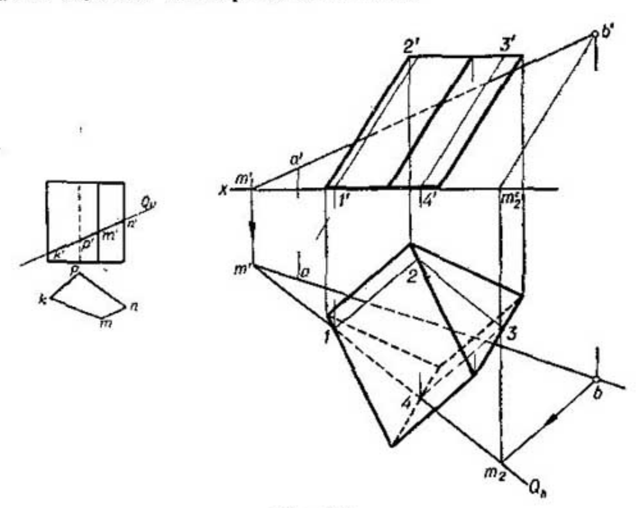


Fig. 274

En la fig. 273, la parte inferior del prisma que se encuentra por debajo del plano P, se representa como oculta. La línea de intersección está solamente dibujada en las caras del prisma.

Si el plano secante es perpendicular a uno de los planos de proyección (fig. 274, a la izquierda), entonces las proyecciones de la figura sección se obtienen sin ninguna clase de construcciones complementarias: la proyección frontal $k'p'm'n'$ se sitúa sobre la traza Q_v, la proyección horizontal $kpnm$ coincide con la proyección del prisma.

En la fig. 274, a la derecha, se muestra la intersección de un prisma por un plano Q dado por las rectas que se cortan AB y BM_2, de las cuales BM_2 es paralela a las aristas del prisma. Por consiguiente, en este caso, el plano secante es de posición general, paralelo a las aristas del prisma. Este plano corta al prisma según el paralelogramo **1—2—3—4**, cuyos lados **1—2** y **3—4** son paralelos a las

aristas del prisma. Para construir estos lados hay que construir la traza del plano Q sobre el plano de la base del prisma y cortar con ella dicha base según la recta *1—4*.

En la fig 275 se muestra la intersección de una pirámide por un plano de posición general P expresado por sus trazas. El problema se reduce a hallar los puntos de intersección de las aristas SA, SB y SC con el plano P, o sea, al problema de intersección de una recta con un plano (véase el § 25). Examinemos la determinación del

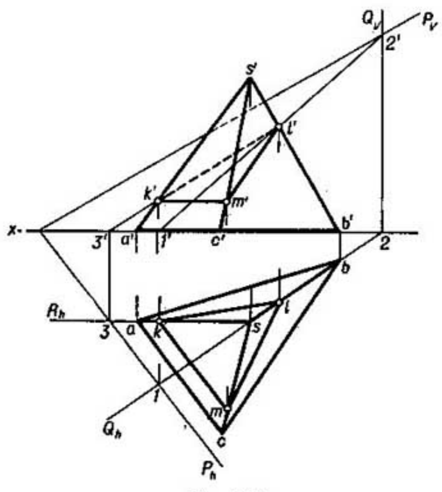


Fig. 275

punto L en el que la arista SB corta al plano P. Efectuamos las siguientes operaciones: 1) por la arista SB trazamos un plano auxiliar, en el caso dado, el plano proyectante horizontal Q; 2) hallamos la recta de intersección *1—2* de los planos P y Q; 3) hallamos el punto L en la intersección de las rectas SB y *1—2*.

Luego, puesto que en este caso la arista SA es paralela al plano V, trazamos por ella el plano frontal auxiliar R. Éste último corta al plano P según su frontal con el punto inicial *3*; en la intersección de esta frontal con la arista SA obtenemos el punto K.

Ahora prestemos atención en otra particularidad del ejemplo dado: la proyección ac es paralela a la traza P_h. Este es el caso cuando las trazas horizontales de dos planos son paralelas entre sí ($P_h \|$ $\| ac$, pero ac es una parte de la traza horizontal del plano de la cara

SAC) y la línea de intersección de tales planos es su horizontal común. Por esta razón, podemos trazar por el punto hallado K una recta paralela a la arista AC (o a P_h), y así hallar el punto M.

Si no existieran estas particularidades se debería proceder análogamente a la construcción del punto L.

El dibujo de la fig. 275 se ha ejecutado de acuerdo con la condición de que el plano P es transparente y que lo principal es dibujar en las caras las líneas de división de la pirámide en dos partes.

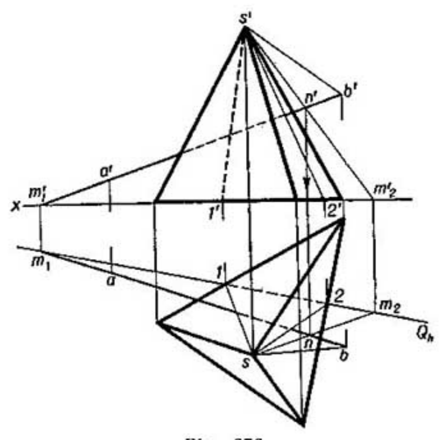


Fig. 276

Supongamos (fig. 276) que una pirámide se ha cortado con un plano P dado por las rectas que se cortan AB y SB, con la particularidad de que la SB pasa por el vértice de la pirámide. Por consiguiente, el plano P corta a la pirámide según un triángulo, uno de cuyos vértices se encuentra en el punto S. Para hallar los otros dos vértices del triángulo (los puntos *1* y *2*) es necesario construir la traza del plano P sobre el plano de la base de la pirámide. Lo demás está claro del dibujo.

Al intersecar la superficie de un prisma o de una pirámide con una *recta* se obtienen dos puntos. Estos puntos suelen llamarse *punto de entrada* y *punto de salida*. Para hallar estos puntos hay que trazar por la recta dada un plano auxiliar y hallar la línea de su intersección con las caras; estas líneas en las caras resultan situadas en un mismo plano con la recta dada y en su intersección dan los puntos en los que la recta dada corta a la superficie.

Pueden darse los casos cuando no hay necesidad de tales construcciones. Un ejemplo se da en la fig. 277: la posición de las proyecciones *k* y *m* es evidente, puesto que las caras laterales del prisma son perpendiculares al plano *H*. Con auxilio de los puntos *k* y *m* se han hallado los puntos *k'* y *m'*.

En la fig. 278 se muestra la construcción de los puntos de intersección de una recta con la superficie de una pirámide. Por la recta *AB* se ha trazado el plano proyectante frontal auxiliar *Q*. La proyección frontal de la figura sección producida por este plano en la pirámide se confunde con la proyección frontal del plano; la proyección horizontal de la sección se ha hallado con ayuda de la construcción. Los puntos de intersección de la proyección horizontal de

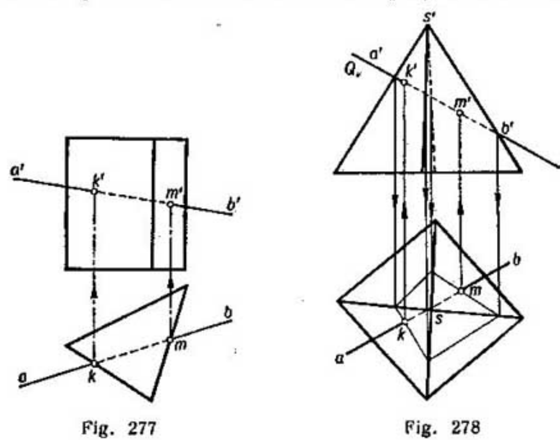


Fig. 277 Fig. 278

la recta *AB* con la proyección horizontal de la figura sección representan las proyecciones horizontales de los puntos buscados; con ayuda de las proyecciones horizontales halladas (los puntos *k* y *m*) se han construido las proyecciones frontales (*k'* y *m'*) de los puntos de intersección.

Uno puede darse una idea de la construcción de los puntos de intersección de una recta con la superficie de un prisma de la manera siguiente. Supongamos que en vez de la proyección rectangular empleamos la o b l i c u á n g u l a [1]. Proyectemos el prisma y la recta *AB* (fig. 279) sobre el plano *H* en dirección paralela a las aristas del

[1] Véase la pág. 14.

prisma dado. El prisma tendrá como proyección el triángulo $c_0d_0e_0$ que coincide con la proyección horizontal de la base inferior del prisma, y la recta AB se proyectará en forma de la recta a_0b_0 que cortará a los lados del triángulo $c_0d_0e_0$ en los puntos 2 y 3. Mediante la proyección inversa obtendremos las proyecciones k_1 y k_2, y con auxilio de éstas, las k_1' y k_2'.

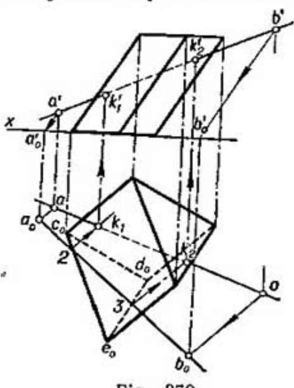


Fig. 279

Así pues, hemos examinado la intersección de un prisma y una pirámide por un plano y una recta. Las construcciones se reducen a la resolución de problemas de la intersección de planos entre si y de una recta con un plano, expuestos en los §§ 24—26. Estos problemas tienen gran importancia y se encuentran en distintos casos. Estos sirven de base para la construcción de las líneas de intersección de superficies poliédricas, examinada en el siguiente parágrafo.

PREGUNTAS A LOS §§ 39—42

1. ¿A qué se le llama contorno del cuerpo respecto al plano de proyección?
2. ¿Con qué se representa una superficie prismática?
3. ¿Cuáles índices permiten establecer que en el dibujo dado está representado un prisma (o un paralelepípedo)?
4. ¿Con qué se expresa la superficie de una pirámide?
5. ¿Qué se comprende bajo el nombre de «tetraedro»?
6. ¿Con cuál condición son suficientes dos proyecciones para la representación de una pirámide?
7. ¿A qué se le llama prismatoide?
8. ¿A qué se le llama *vista* en los dibujos técnicos?
9. ¿En qué consiste la diferencia entre *vista* y *proyección* y con cuál condición esta diferencia desaparece?
10. ¿Cuáles sistemas de disposición de las representaciones se emplean en los dibujos técnicos?
11. ¿Cómo se construye la figura obtenida al intersecar un prisma o una pirámide con un plano?
12. ¿Cómo se construyen los puntos de intersección de un prisma o una pirámide con una recta (los puntos de entrada y salida)?
13. ¿Se puede establecer la comunidad de los métodos de tal construcción y de la construcción de los puntos de intersección de un plano con una recta?
14. ¿Cómo se interseca un prisma por un plano paralelo a las aristas laterales del prisma?
15. ¿Cómo se corta una pirámide con un plano que pasa por el vértice de la pirámide?
16. ¿Cómo se puede emplear la proyección oblicuángula para hallar los puntos de intersección de un prisma por una recta?

§ 43. INTERSECCION DE UNA SUPERFICIE POLIEDRICA POR OTRA

La construcción de las líneas de intersección de las superficies poliédricas se puede efectuar por dos procedimientos, combinándolos o eligiendo el que, según los datos del problema, ofrece construcciones más simples. Estos procedimientos son los siguientes:

1) *Se determinan los puntos en los que las aristas de una de las superficies cortan a las caras de la otra y las aristas de la segunda cortan a las caras de la primera*[1]. Por los puntos hallados, en una sucesión determinada, se traza una línea quebrada que representa la línea de intersección de las superficies dadas. En este caso, se pueden unir con rectas solamente las proyecciones de aquellos puntos, obtenidos como resultado de la construcción, que pertenecen a una misma cara.

2) *Se determinan los segmentos de las rectas según las cuales las caras de una superficie cortan a las caras de la otra*[2]; estos segmentos son los eslabones de la quebrada obtenida al intersecarse dos superficies poliédricas.

Si la proyección de la arista de una superficie no corta por lo menos a una de las proyecciones de la cara de la otra, esta arista no corta a esta cara. No obstante, la intersección de las proyecciones de la arista y la cara no significa todavía que dadas arista y cara se cortan en el espacio.

En algunos de los ejemplos expuestos a continuación se han empleado los esquemas generales de construcción de los puntos de intersección, expuestos más arriba, y en otros se han utilizado las particularidades singulares para simplificar las construcciones.

El ejemplo expuesto en la fig. 268 se puede examinar como un caso de intersección de una pirámide con un prisma. Los puntos *2* y *3* se obtienen al intersecar las caras superior e inferior del prisma con la arista de la pirámide, y las rectas que pasan por los puntos *5* y *6* se obtienen como resultado de la intersección de las mismas caras del prisma con la cara SAC de la pirámide.

En la fig. 280 se muestra la intersección de la superficie de un prisma triangular por una pirámide triangular; la pirámide se ha colocado en el orificio, correspondiente por su forma, del prisma.

La construcción se funda en la determinación de los puntos de intersección de las aristas de uno de los poliedros con las caras del otro. En la fig. 281 se muestra la construcción de los puntos A_1 y A_2 en los que la arista SA de la pirámide corta a las caras DEE_1D_1 y EFF_1E_1 del prisma. Por la arista SA se ha trazado el plano Q (proyectante horizontal) que en la proyección horizontal corta a las aristas del prisma en los puntos *1*, *2* y *3*; con ayuda de estas proyecciones han

---

[1] Problema de intersección de una recta con un plano.
[2] Problema de intersección de dos planos.

sido halladas las proyecciones frontales de los puntos de intersección del plano Q con las aristas del prisma $1'$, $2'$ y $3'$. Luego se han señalado los puntos a'_1 y a'_2 en los cuales $a's'$ se interseca con el contorno $1'2'3'$. Los puntos a'_1 y a'_2 son las proyecciones frontales de los puntos de encuentro de la arista SA con las caras del prisma; las proyecciones horizontales de estos puntos, o sea, los puntos a_1 y a_2, se encuentran sobre la proyección horizontal de la arista SA. Procediendo del mismo modo con las aristas SB y SC, hallamos los puntos B_1, B_2, C_1 y C_2 (fig. 280).

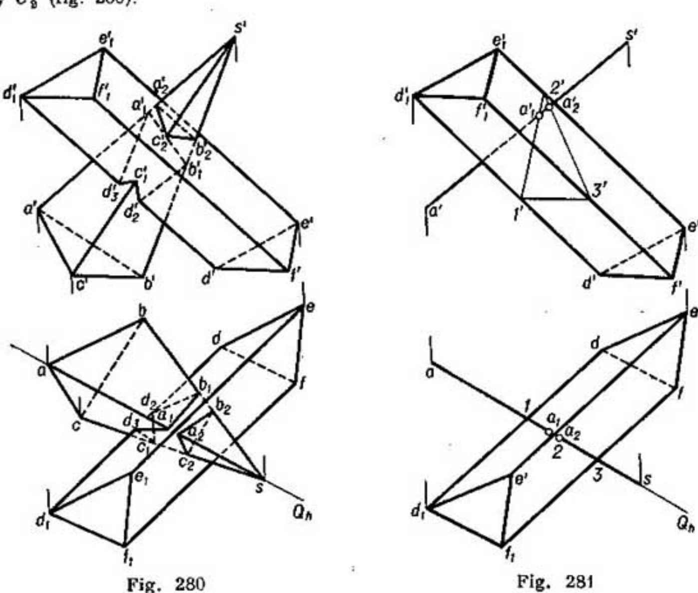


Fig. 280 Fig. 281

A continuación hallamos la intersección de las aristas del prisma con las caras de la pirámide, trazando también planos proyectantes horizontales auxiliares (claro que en este caso, lo mismo que en el anterior, se pueden emplear los planos proyectantes frontales). Analizando la arista DD_1 señalamos los puntos de encuentro D_2 y D_3. La arista EE_1 no se corta con las caras de la pirámide, lo mismo que la arista FF_1.

Para no cometer errores en el caso de gran cantidad de construcciones auxiliares, los puntos de encuentro hallados se pueden escribir como se da en la tabla de la pág 168.

En este ejemplo se obtienen dos poliedros independientes. En la tabla, el orden de formación de los poliedros se señala con las cifras *1*, *2*, etc., para uno de ellos, y con las cifras I, II, etc., para el otro. Esto significa que el punto a'_1 (*1*) debe unirse con el punto b'_1 (*2*), el punto b'_1, con el punto d'_2 (*3*), el d'_2, con el c'_1 (*4*), el c'_1, con el d'_3 (*5*) y , por fin, el d'_3, con el a'_1 (*6*).

	Arista que se investiga	Cara con la que se interseca la arista	Punto de intersección de la arista con la cara	Lugar que ocupa el punto dado en el orden general de unión de los puntos
Pirámide	SA	DEE_1D_1	A_1	1,6
		EFF_1E_1	A_2	I
	SB	DEE_1D_1	B_1	2
		EFF_1E_1	B_2	II
	SC	DFF_1D_1	C_1	4
		EFF_1E_1	C_2	III
Prisma	DD_1	SCB	D_2	3
		SAC	D_3	5
	EE_1	no existe	—	—
	FF_1	ídem	—	—

En las construcciones expuestas en las figs. 280 y 281 se utilizaron como auxiliares planos proyectantes horizontales. Y, aunque el empleo precisamente de los planos proyectantes horizontales o frontales como planos auxiliares al determinar los puntos de intersección de una recta con un plano o de dos planos entre sí (y, por consiguiente, también en los casos de intersección de superficies poliédricas) es cómodo y es el procedimiento más común, pueden darse los casos

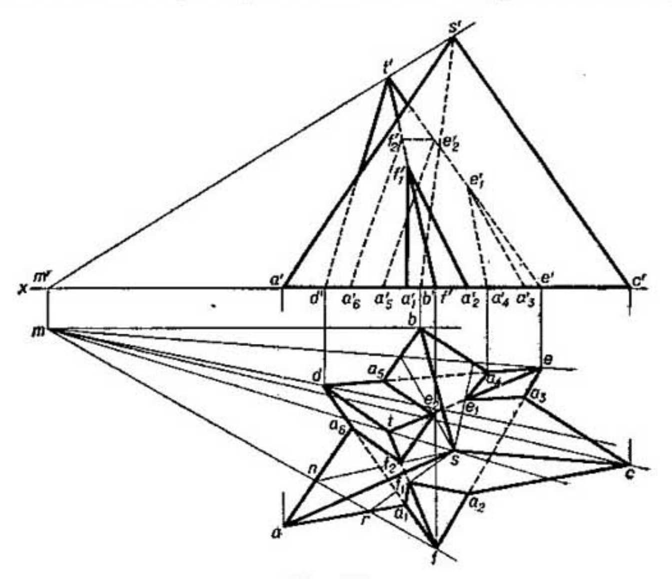


Fig. 282

cuando es más conveniente emplear como planos auxiliares los planos de posición general: éstos ofrecen menos construcciones auxiliares. Pero para ello deben tenerse las condiciones correspondientes. Un ejemplo se da en la fig. 282. Aquí las bases de ambas pirámides se encuentran en un mismo plano. Por los vértices de las pirámides se ha trazado una recta y se ha hallado la traza de esta recta (el punto M) sobre el plano de las bases de las pirámides. Todo plano trazado por la recta ST pasa por los vértices de ambas pirámides y corta a sus caras según rectas (véase la fig. 276); las trazas de estos planos sobre el plano de las bases de las pirámides pasan por el punto m.

Trazando, por ejemplo, la recta mf, se puede tomar como traza de uno de tales planos; en la fig. 282 la traza de este plano se confunde con la proyección mf.

Tal plano corta a la base de la pirámide $ABCS$ en los puntos n y r; uniendo estos puntos con el punto s obtendremos el contorno de la sección producida en la pirámide por este plano (en el que se encuentra la arista TF) y hallaremos las proyecciones de los puntos de intersección de la arista TF, los puntos f_1 y f_2; la determinación de las proyecciones frontales de estos puntos de intersección no presenta dificultades.

Investigando de este modo todas las aristas de ambas pirámides, revelaremos los puntos necesarios para la construcción de las líneas de intersección.

Los puntos de intersección de los lados de la base se determinan en la proyección horizontal sin construcciones suplementarias.

En la tabla siguiente se da el resumen de las construcciones.

Arista que se investiga	Caras con las que se corta la arista que se investiga	Aristas con las que se corta la arista que se investiga	Punto de intersección
TF	ACS	—	F_1
	ABS	—	F_2
ET	CBS	—	E_1
	ABS	—	E_2
DT			
FD	No existe	—	—
	—	AC	A_1
	—	AB	A_6
DE	—	BC	A_4
	—	AB	A_5
EF	—	BC	A_3
	—	AC	A_2
AS	No existe	—	—
BS	ídem	—	—
CS	ídem	—	—

La construcción indicada en la fig. 282 puede emplearse también cuando la base de una de las pirámides se encuentra en el plano H y la base de la otra, en el plano V. Además, en el caso general, hay que hallar las trazas de la recta trazada por los vértices de las pirámides sobre los planos H y V y, respectivamente, las trazas horizontal y frontal de cada uno de los planos auxiliares.

Si se intersecan un prisma y una pirámide, entonces, el procedimiento indicado en la fig. 282 para la intersección de dos pirámides, puede ser empleado si se traza una recta por el vértice de la pirámide paralelamente a las aristas del prisma; los planos trazados por esta recta cortarán a las caras del prisma por rectas

paralelas a las aristas, y a las caras de la pirámide por rectas que pasan por su vértice. En el caso de intersección de dos prismas, los planos secantes auxiliares pueden tomarse paralelamente a las aristas de ambos prismas.

Si en la intersección participa un prisma, puede emplearse también el método de cambio de los planos de proyección: obteniendo las proyecciones de los poliedros sobre el plano perpendicular a las aristas del prisma, utilizamos las caras del prisma en esta posición en calidad de planos secantes.

§ 44. PROCEDIMIENTOS GENERALES DE DESARROLLO DE SUPERFICIES POLIÉDRICAS (PRISMAS Y PIRÁMIDES)

El desarrollo de una superficie prismática se puede efectuar por dos esquemas. Primer esquema (fig. 283):

1) cortar la superficie con un plano perpendicular a las aristas;

2) determinar las longitudes de los segmentos de la línea quebrada obtenida al intersecar la superficie del prisma con este plano;

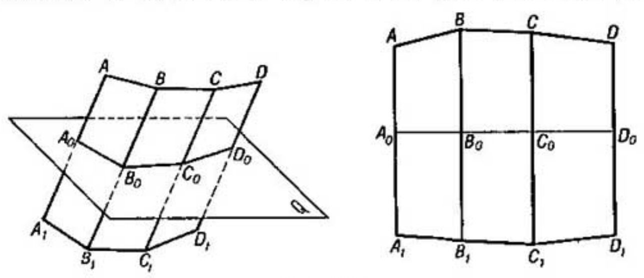


Fig. 283

3) desarrollar la línea quebrada en la recta A_0D_0 y llevar sobre las perpendiculares trazadas en los puntos A_0, B_0, ... a la recta A_0D_0 las longitudes de los segmentos de las aristas A_0A, A_0A_1, B_0B, B_0B_1, etc.;

4) trazar los segmentos AB, BC y CD, y también los segmentos A_1B_1, B_1C_1 y C_1D_1.

El segundo esquema de desarrollo de una superficie prismática consiste en lo siguiente (fig. 284):

1) dividir los cuadriláteros (las caras) en triángulos con ayuda de diagonales;

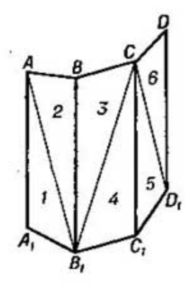
2) determinar las longitudes de los lados de estos triángulos;

3) construir sucesivamente los triángulos *1*, *2*, *3*, etc. en el plano del dibujo.

El desarrollo puede efectuarse así cómo se indica a continuación en la fig. 287.

En las figs. 285 y 286 se da un ejemplo del desarrollo de la superficie lateral de un prisma.

La construcción del desarrollo se ha efectuado por el primer esquema. En la fig. 285 se han cumplido las construcciones prepara-



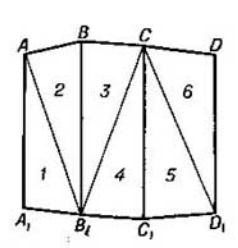


Fig. 284

torias para el desarrollo de la superficie. Ante todo se ha introducido el plano de proyección complementario S perpendicular al plano H y paralelo a las aristas del prisma.

Para obtener la sección normal se ha trazado el plano Q perpendicular a las aristas del prisma. En el sistema S, H, el plano Q es perpendicular al plano S, por lo cual la proyección de la figura sección sobre el plano S se encuentra en la traza Q_s. Por ser el plano Q perpendicular a las aristas del prisma, las proyecciones de estas aristas sobre el plano S son perpendiculares a Q_s, y dado que el plano S es paralelo a las aristas, sus longitudes son iguales a las longitudes de los segmentos $a_s e_s$, $b_s f_s$, etc. Luego, con ayuda del abatimiento del plano Q sobre el plano H se determina la forma verdadera de la sección, el cuadrilátero $1_0 2_0 3_0 4_0$.

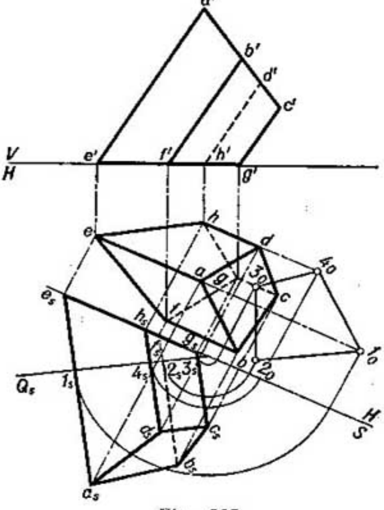


Fig. 285

En la fig. 286 se muestra el desarrollo buscado: sobre una recta se han llevado sucesivamente los segmentos $1-2=1_02_0$, $2-3=$ $=2_03_0$, etc.; en los puntos 1, 2, etc. se han trazado las perpendiculares a esta recta y sobre ellas se han llevado los segmentos $1A=$ $=1_sa_s$, $1E=1_se_s$, $2B=2_sb_s$, etc. Luego se han trazado las quebradas $ABCDA$ y $EFGHE$.

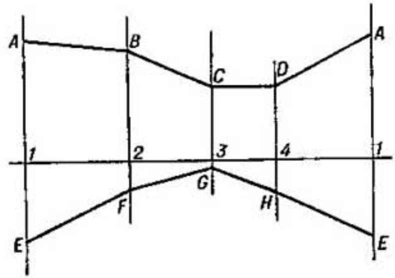


Fig. 286

En la fig. 287 se da una construcción distinta. Una vez construida la proyección del prisma sobre el plano S paralelo a las aristas del prisma, trazamos a partir de los puntos e_s, h_s, g_s, f_s, a_s, d_s, c_s

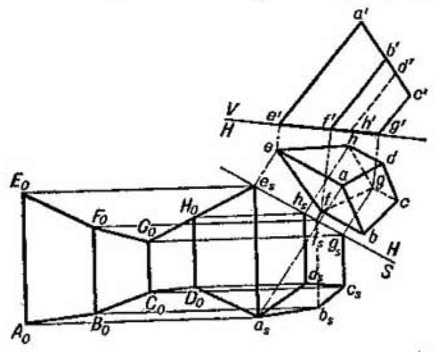


Fig. 287

y b_s rectas perpendiculares a e_sa_s. Con centro en el punto e_s describimos un arco de radio igual a eh, y en la intersección con la recta trazada desde el punto h_s obtenemos el punto H_0; con centro en este punto describimos un arco de radio igual a hg y en su intersección con la recta trazada desde el punto g_s obtenemos el punto G_0, etc.

($G_0F_0=gf$, $F_0E_0=fe$). A partir de los puntos H_0, G_0, F_0 y E_0 trazamos rectas paralelas a e_sa_s hasta su intersección con las rectas correspondientes trazadas desde los puntos d_s, c_s, b_s y a_s. La variante indicada es conveniente cuando la magnitud de los lados de la base puede ser tomada directamente del dibujo.

El desarrollo de la superficie lateral de una pirámide se puede realizar por el esquema siguiente:

1) determinar las longitudes de las aristas y los lados de la base de la pirámide;

2) construir en el plano del dibujo sucesivamente los triángulos (las caras de la pirámide).

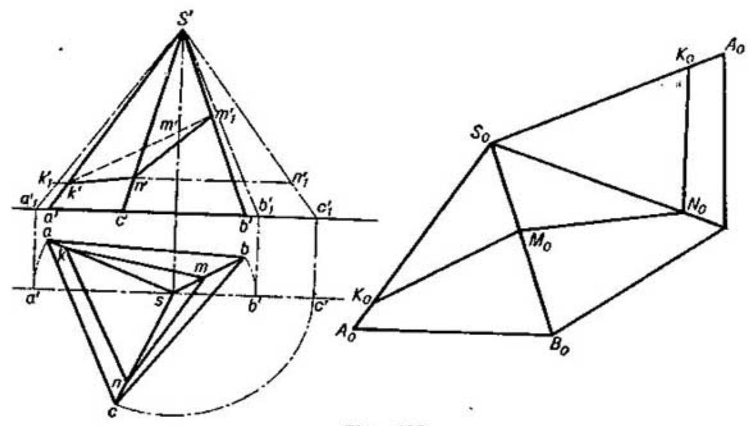


Fig. 288

En la fig. 288 se muestra la construcción del desarrollo de la superficie lateral de una pirámide en el que, en las caras de la pirámide, se han dibujado los lados de la sección triangular producida en esta pirámide por un plano. Se ha hallado la longitud de cada arista, luego se ha construido el triángulo $A_0S_0B_0$ por sus tres lados: la base A_0B_0 se ha tomado igual a la proyección horizontal ab, y los lados laterales se han tomado iguales a las magnitudes verdaderas de las aristas SA y SB (es decir, iguales a los segmentos $s'a_1'$ y $s'b_1'$).

A continuación, sobre el lado S_0B_0 se ha construido el segundo triángulo, con la particularidad de que las longitudes de los otros dos lados se han tomado: la del lado B_0C_0, igual a la proyección horizontal bc, y la del lado S_0C_0, igual a la longitud de la arista SC (es decir, al segmento $s'c_1'$).

De la misma manera se ha construido el tercer triángulo. Como resultado se ha obtenido la superficie lateral desarrollada de la pirámide. Si se lleva ahora sobre los lados S_0A_0, S_0B_0 y S_0C_0 los segmentos S_0K_0, S_0M_0 y S_0N_0 iguales a los segmentos de las aristas de la pirámide, intersecada por un plano, obtendremos la línea quebrada $K_0M_0N_0K_0$ compuesta por los lados de la figura sección.

PREGUNTAS A LOS §§ 43 Y 44

1. ¿Cómo se construye la línea de intersección de una superficie poliédrica por otra?
2. ¿En cuál caso es conveniente emplear planos de posición general (como auxiliares) al intersecarse dos pirámides y cómo deben trazarse estos planos?
3. ¿Por cuáles esquemas se puede realizar el desarrollo de las superficies que limitan a un prisma y a una pirámide?
4. ¿En cuál caso estos desarrollos serán completos?

VII
CAPITULO

LÍNEAS CURVAS

§ 45. CONOCIMIENTOS GENERALES SOBRE LAS LINEAS CURVAS Y SU PROYECCION

Toda curva puede definirse como la trayectoria de un punto que se mueve en un plano o en el espacio [1]. Como ejemplo sirven la espiral de Arquímedes y línea helicoidal cilíndrica conocidas del curso de dibujo lineal de la escuela secundaria. *La curva puede ser obtenida también como resultado de la intersección de dos superficies* (por ejemplo, de dos superficies cilíndricas) *o de la intersección de una superficie con un plano* (por ejemplo, la elipse, que se obtiene al cortar la superficie lateral de un cilindro circular recto con un plano que forma con el eje del cilindro cierto ángulo agudo). *En toda una serie de casos, la curva representa el lugar geométrico de puntos que corresponden a condiciones determinadas para esta curva* (circunferencia, elipse, parábola, etc.).

La curva queda determinada por las posiciones de los puntos que la constituyen. Los puntos de la curva se determinan por sus coordenadas.

Las curvas pueden ser *planas*, es decir, todos los puntos de las cuales pertenecen a un mismo plano, y *espaciales* (*alabeadas*), o sea, tales, cuyos puntos pertenecen a distintos planos [2]. Como ejemplo de líneas curvas planas sirven la circunferencia, la elipse, la parábola y la espiral de Arquímedes; como ejemplo de curvas espaciales, la línea helicoidal, la línea de intersección de las superficies laterales de un cilindro y un cono circulares rectos.

Para construir las proyecciones de una curva (plana o espacial) es necesario construir las proyecciones de toda una serie de puntos

---

[1] En toda la extensión de la curva no deben haber secciones rectilíneas.
[2] A las curvas espaciales se las llama también *líneas de doble curvatura*.

pertenecientes a esta curva (fig. 289). Un ejemplo de la construcción de las proyecciones de una curva plana se dio en la fig. 119 (pág. 65).

La curva espacial se proyecta en forma de curva plana, la curva plana, también en forma de curva plana o en forma de línea recta, si la curva se encuentra en un plano perpendicular al plano de proyección.

La línea se considera *regular* si en su formación está subordinada a una ley geométrica cualquiera. Si con esto la curva se determina

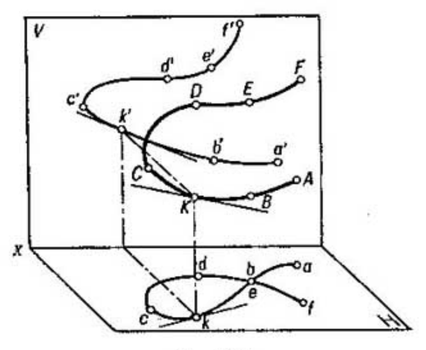


Fig. 289

en las coordenadas cartesianas por una ecuación algebraica, entonces, ésta se llama *curva algebraica*[1]. Como ejemplo puede servir la elipse, cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

El grado de la ecuación determina el «orden» de la curva: la elipse es una curva de segundo orden. La curva que representa la proyección de una curva de cierto orden conserva el mismo orden o es una curva de orden inferior.

La tangente a una curva se proyecta, en el caso general, en forma de tangente a la proyección de la curva. Si, por ejemplo, se ha trazado una tangente a una circunferencia situada en un plano que forma con el plano de proyección un ángulo agudo, entonces, esta tangente se proyecta como tangente a la elipse que expresa la proyección de esta circunferencia. En la fig. 289 viene representada una curva

[1] Si la curva se determina no por una ecuación algebraica, entonces esta curva se refiere a las curvas transcendentes.

espacial, sus proyecciones sobre los planos V y H, la tangente a esta recta en el punto K y las proyecciones de esta tangente. El plano proyectante que pasa por la tangente a la proyección de la curva, tiene contacto con la curva en el espacio.

Para tener una idea más clara de una curva en el espacio, al expresar una curva plana o espacial por sus proyecciones, se deben indicar en las proyecciones ciertos puntos característicos para esta curva o para su posición respecto a los planos de proyección. Pueden ser señalados, por ejemplo, los puntos de la curva más alejados de los planos de proyección y los puntos más cercanos a éstos; para ello hay que trazar unos planos tangentes a la curva y paralelos a los planos de proyección correspondientes: en la fig. 290, el plano S, paralelo al plano V, permite establecer que el punto G de la curva en el espacio es el punto más alejado del plano V.

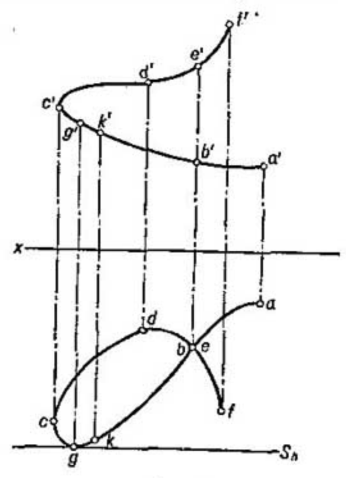


Fig. 290

La *curvatura* de una línea curva, plana o espacial, puede ser invariable (en toda la extensión de esta curva o en secciones separadas de ella) o variar en distintos puntos de la curva. Por ejemplo, la curvatura de una circunferencia o de una línea helicoidal cilíndrica es invariable en toda la extensión de éstas, y la curvatura de una elipse se repite en sus cuadrantes, variando continuamente en los límites de un cuadrante. Se usa el término *curvatura de la línea*. La curvatura se expresa por un número; ésta caracteriza a la curva en uno de sus puntos dados, más exactamente, en un arco infinitamente pequeño, o sea, en las *vecindades* de este punto.

La *longitud* de cierta sección de una curva, tanto plana como espacial, se determina aproximadamente, sustituyendo la línea curva por una quebrada, inscrita en esta curva, y midiendo la longitud de los eslabones de esta quebrada (esto, claro está, no se refiere a las curvas, la longitud de las cuales puede ser hallada valiéndose de cálculos simples [1]). Para reducir el error deben tomarse segmentos de la quebrada cuyas longitudes se diferencien poco de los arcos de

[1] Por ejemplo, una circunferencia, una espira de una línea helicoidal cilíndrica (véase a continuación el § 48).

la curva cuyas cuerdas son estos segmentos. En la fig. 291 se muestra la determinación de la longitud de la curva ABC: la proyección horizontal (la curva abc) se ha dividido en partes pequeñas y se ha «desarrollado» en una recta sobre el eje x de tal manera que los segmentos $a_0 1_0$, $1_0 b_0$, etc. son respectivamente iguales a las cuerdas

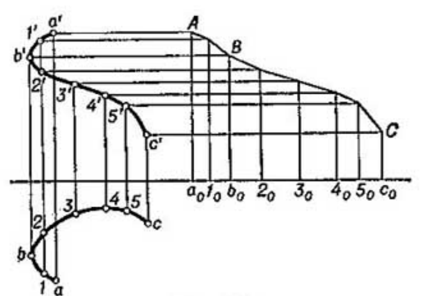


Fig. 291

$a1$, $1b$, etc.; en los puntos a_0, 1_0, etc. se han levantado perpendiculares al eje x, y sobre estas perpendiculares se han llevado las Z-coordenadas de los puntos de la curva. Obtenemos una quebrada cuya longitud puede ser tomada aproximadamente como longitud de la curva ABC.

§ 46. CURVAS PLANAS

Girando la secante KS_1 (fig. 292) alrededor del eje K de modo tal, que el punto K_1 tienda al punto K, obtendremos la posición límite KT, es decir, la posición de la tangente a la curva en el punto

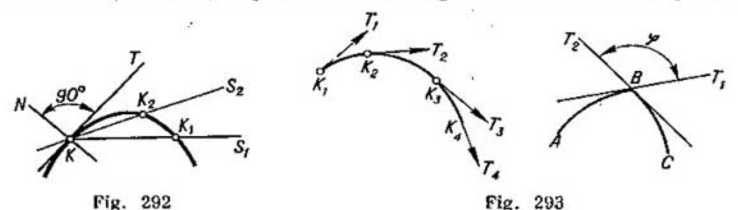


Fig. 292 Fig. 293

K. La tangente refleja la dirección de movimiento del punto que engendra la curva; la dirección de la tangente en cierto punto de la curva se llama *dirección de la curva en este punto.*

Trazando por el punto K la recta $KN \perp KT$ obtenemos la normal a la curva en este punto K. La normal a una circunferencia coincide con la dirección de su radio. La construcción de la normal a una elipse se muestra en el § 21.

En el punto K (fig. 292) la curva es *suave*: en el punto K la curva tiene una sola tangente. Si la curva se compone solamente de tales puntos, ésta es una *curva suave* (fig. 293, a la izquierda). Pero en la curva pueden haber puntos (véase la fig. 293, a la derecha) en los que hay dos tangentes con un ángulo entre ellas distinto de 180°. A tal punto se le llama *punto de inflexión*, *punto angular* o *punto de salida*, y la recta en este punto no es suave. En este punto como si

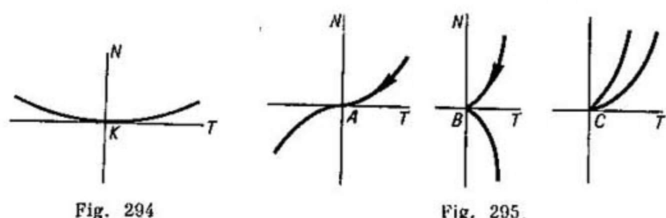


Fig. 294 Fig. 295

se cortaran bajo cierto ángulo dos rectas AB y BC. Si el ángulo φ resulta igual a 180°, las curvas AB y BC harán contacto y cada una de ellas en el punto B resultará suave. Las curvas que hacen contacto tienen una misma tangente en su punto común, y las normales a las curvas en este punto se sitúan en una misma recta.

En la fig. 294, en el punto K de la curva se han trazado la tangente KT y la normal KN. Si en todos los puntos de la curva se repite tal disposición respecto de la tangente y la normal en la vecindad examinada [1], la curva es *convexa* y sus puntos son *ordinarios* (o *regulares*). Como ejemplo sirve la elipse.

En la fig. 295 se muestran los puntos: A, *punto de inflexión* en el que la curva corta a la tangente; B y C, los *puntos de retorno* en los que la recta tiene punta («pico») y la tangente es común para ambas ramas de la curva (al punto B se le llama *punto de retorno de primer género*, y al punto C, *punto de retorno de segundo género*). Aquí hemos tocado los llamados *puntos singulares de una curva* [2], por ejemplo, tales, en los cuales la dirección de movimiento del punto que describe la curva cambia de sentido (puntos de retorno) o a salto (véase la fig. 293, el punto B).

[1] Por cercanías aquí se comprenden los puntos de la curva en la proximidad inmediata al punto que se examina.

[2] Los puntos singulares se estudian en el curso de Geometría Diferencial.

Se puede señalar también el *punto doble* (*punto nodal* o *de autointersección*), en el que la curva se corta a sí misma y tiene dos tangentes (fig. 296, el punto D), y el *punto de autocontacto* en el que la curva se encuentra a sí misma, pero ambas tangentes coinciden (en la misma figura, el punto E).

Todos estos casos pueden encontrarse en las proyecciones de las curvas planas, siendo suficiente para la curva plana tener una sola proyección (si, claro está, esta proyección no es una recta) para juzgar sobre el carácter de sus puntos, puesto que cualquier particularidad de esta proyección expresa la misma particularidad de la propia curva plana.



Fig. 296

La curvatura de una curva plana en un punto cualquiera A_1 (fig. 297) *se considera como el límite al que tiende la relación entre el ángulo formado por las tangentes trazadas en los puntos vecinos A_1 y A_2 de la curva, y el arco A_1A_2, si el punto A_2 tiende al A_1:*

$$\lim \frac{\varphi_1}{\overline{A_1A_2}} = k.$$

Así pues, *se llama curvatura de una curva en uno de sus puntos A al valor límite de la relación del ángulo φ_1 al arco A_1A_2*. La curvatura se designa con la letra k.

Evidentemente, el ángulo φ puede ser también expresado por el ángulo entre las normales a la curva en los puntos A_1 y A_2.

Si nos imaginamos una circunferencia que pase por el punto A_1 (fig. 297) y dos puntos vecinos al dado en la curva, que tienden al punto A_1, entonces, la circunferencia alcanzará su posición límite cuando el punto de intersección de las normales C_1 alcance su posición límite y se exprese por cierto radio C_1A_1. En este caso, la circunferencia hará contacto con la curva en el punto A_1. La circunferencia y la curva tendrán comunes una tangente y una normal en la que se encuentra el centro de la circunferencia en contacto. Se emplean los términos: *círculo de curvatura de la curva en el punto dado*, *centro de curvatura* (o centro del círculo de curvatura), *radio de curvatura* (o radio del círculo de curvatura). *La curvatura de una curva en un punto cualquiera de la misma es igual a la recíproca del radio de curvatura*:

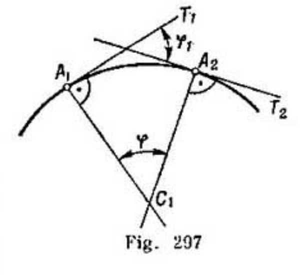


Fig. 297

$$k = \frac{1}{r}.$$

Es evidente que para una circunferencia, en cualquier punto de ésta, el radio de la circunferencia en contacto será igual al radio de la circunferencia dada. De aquí que: *la curvatura de una circunferencia es igual en todos sus puntos a la re-*

cíproca del radio de esta circunferencia, o sea,

$$k_{cir}=\frac{1}{R}.$$

Cuanto mayor sea R, tanto menor será k.

En la elipse (fig. 298, a la izquierda) los centros de curvatura en los vértices A_1 y A_2 se encuentran en su eje mayor, y en los vértices B_1 y B_2, en su eje menor. Para determinar la posición de los centros de curvatura hemos empleado las fórmulas conocidas para los radios de curvatura en los vértices de la elipse: en los vértices A_1 y A_2, la fórmula

$$r_1=\frac{b^2}{a},$$

y en los vértices B_1 y B_2, la fórmula

$$r_2=\frac{a^2}{b},$$

donde a es el semieje mayor, b, el semieje menor de la elipse.

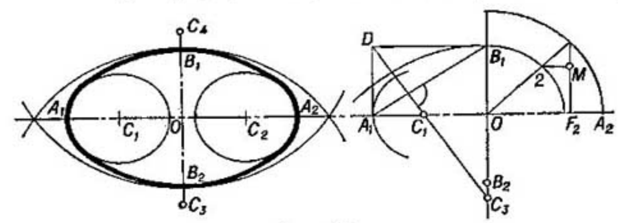


Fig. 298

En la fig. 298, a la derecha, se muestra la construcción de los centros de curvatura C_1 y C_3 y la determinación de la magnitud de los radios de curvatura en los vértices A_1 y B_1: con ayuda de los semiejes dados OA_1 y OB_1 se construye el rectángulo OB_1DA_1, en éste se traza la diagonal A_1B_1 y desde el punto D se baja una perpendicular a esta diagonal, que cortará al eje mayor en el punto C_1 y a la prolongación del eje menor en el punto C_3. Si trazamos con centro en el punto C_1 y radio C_1A_1 y con centro en el punto C_3 y radio C_3B_1 dos arcos de circunferencia, entre éstos habrá una holgura; en ésta, con auxilio de la plantilla de curvas se traza un arco que haga contacto con ambos arcos de las circunferencias. Para trazar este arco con más exactitud es conveniente hallar un punto de la elipse así como se muestra en la misma figura para el punto M sobre una recta trazada por el foco F_2 perpendicularmente al eje de la elipse A_1A_2. Sucesión de la construcción: el foco F_2 (véase el § 21), los arcos de radios OA_2 y OB_1, la perpendicular a A_1A_2 en el punto F_2 hasta su intersección con el arco en el punto *1*, el radio $O-1$ y por el punto *2* la recta paralela a OA_2. Con ayuda de los puntos hallados C_1 y C_3 se pueden hallar dos centros más, y con auxilio del punto M, tres puntos más para trazar la parte restante de la curva. Esta línea mixta es muy próxima a la elipse.

¿Cuál curva plana tiene curvatura constante? La circunferencia (véase más arriba: $k_{cir}=\frac{1}{R}$, donde R es el radio de la circunferencia). Si consideramos a una recta como una circunferencia de $R=\infty$, entonces, también aquí la curvatura es constante: $k=0$.

En la fig. 299 se muestra la construcción aproximada de la tangente y la normal a una curva suave en cierto punto K.

Trazamos la recta auxiliar EF aproximadamente en dirección perpendicular a la dirección supuesta de la tangente a la curva $ABCD$. Luego, por el punto K, trazamos unas cuantas rectas que corten a la curva $ABCD$ y a la recta EF. Si llevamos sobre estas rectas los segmentos $A_1A_2=AK$, $B_1B_2=BK$, $C_1C_2=CK$, $D_1D_2=KD$, etc., y trazamos por los puntos A_2, B_2, C_2, D_2, ... una línea curva suave, entonces en su intersección con la recta EF obtendremos el punto M, es decir, el segundo punto de la recta tangente a la curva $ABCD$ en el punto K[1].

En la fig. 300 se muestra la construcción aproximada del centro de curvatura en cierto punto K de una curva.

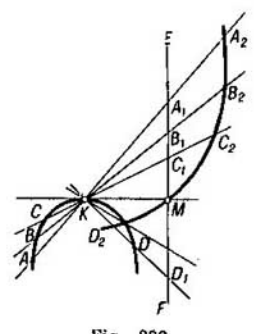


Fig. 299

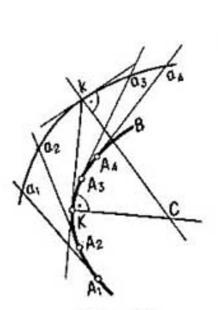


Fig. 300

Tomando en la curva cerca del punto K unos cuantos puntos A_1, A_2, ..., trazamos por estos puntos y por el punto K tangentes. Llevamos sobre estas tangentes los segmentos arbitrarios, pero iguales entre sí, A_1a_1, A_2 a_2, Kk, ... y trazamos por los puntos a_1, a_2, k, ..., una línea curva. En la intersección de las normales en los puntos K y k se obtiene el punto C, es decir, el centro de curvatura buscado, y el radio de curvatura $r=CK$. De aquí se determina la curvatura en el punto K, igual a $\frac{1}{r}$.

Si se construyen los centros de curvatura de la curva dada en una serie de puntos, entonces, por estos centros pasará a su vez una curva *llamada evoluta de la curva dada* y que es *el lugar geométrico de los centros de curvatura de la misma.* A la curva dada, con relación a su evoluta, se la llama *evolvente.* Por ejemplo, en la curva llamada evolvente de la circunferencia los centros de curvatura en diferentes puntos de esta curva están situados sobre la circunferencia, la cual es la evoluta respecto a la evolvente dada.

§ 47. CURVAS ESPACIALES

Mucho de lo estudiado respecto a las curvas planas puede ser también referido a las curvas espaciales. Por ejemplo, la tangente a una curva espacial también se obtiene de la secante KS_1 (fig. 292)

[1] La curva $A_2B_2C_2D_2$ es un ejemplo de la así llamada curva de errores.

al coincidir los puntos K y K_1. También en una curva espacial pueden haber puntos de distinto género: corrientes (regulares), puntos de inflexión, «picos» y otros. Pero, si para la curva plana en el punto K (fig. 292) se podía trazar solamente una perpendicular KN (normal) a la tangente KT, para la curva espacial tales perpendiculares en el punto de contacto pueden haber una infinidad, lo que conduce a la noción de *plano normal*. Luego, para la curva plana es suficiente disponer de una proyección para juzgar sobre el carácter de sus puntos, mientras que para la curva espacial, se puede juzgar sobre el carácter de sus puntos solamente conociendo dos proyecciones de esta curva. Por ejemplo, en las figs. 289 y 290 la confrontación de las proyecciones horizontal y frontal demuestra que, a pesar de que en la proyección horizontal se tiene un punto doble, en la propia curva no existe punto doble. *Lo mismo que para una curva plana, la tangente a una curva en el espacio* (fig. 289) *se proyecta en una tangente a la proyección de esta curva.* El plano proyectante trazado por la tangente a la proyección de la curva, hace contacto con la curva en el espacio.

Todos los puntos de una curva plana están situados en un mismo plano. En lo que se refiere a una curva espacial, se puede hablar solamente del plano más próximo a la curva en el punto que se examina. A este plano se le llama *de contacto*. Supongamos que en la fig. 292 está representada no la porción de una curva plana, sino la de una espacial. Los tres puntos K, K_1 y K_2 de esta curva determinan a cierto plano. La posición límite de este plano, cuando la secante KS_2 pasa a ser tangente en el punto K y el tercer punto se aproxima infinitamente al punto de tangencia, define al plano de contacto en el punto K de la curva espacial. Cerca del punto K se puede considerar que la curva está situada en el plano de contacto

Los planos de contacto y normal son perpendiculares entre sí; esto se desprende del hecho de que el plano de contacto contiene a la tangente a la curva.

Al intersecarse los planos normal y de contacto se obtiene una de las normales, la *normal principal*. La normal perpendicular al plano de contacto se llama *binormal*.

A los planos de contacto y normal se les añade un tercer plano perpendicular a los primeros Este plano pasa por la tangente y la binormal, y se llama *plano de rectificación*.

Estos tres planos, que forman un triedro, se usan como planos de coordenadas al examinar la curva en el punto dado. La posición del triedro depende de la posición del punto en la curva.

Por analogía con el centro de curvatura de una curva plana como la posición límite del punto de intersección de dos normales (fig. 297), obtenemos el *eje de curvatura de una curva espacial* como la posición límite de la recta de intersección de los planos normales vecinos. En esta posición límite *el eje de curvatura es paralelo a la binormal; en la intersección del eje de curvatura con la normal principal se obtiene el centro de curvatura*, de donde se determina el radio de curvatura como la distancia desde este centro hasta el punto examinado de la curva. Así como para la curva plana, la curvatura de una curva espacial es igual a la recíproca del radio de curvatura. Si nos imaginamos la aproximación límite de tres puntos vecinos de una curva espacial y la posición límite de la circunferencia trazada por estos puntos, obtenemos el círculo de curvatura en el plano de contacto, y su centro es el centro de curvatura, y su radio, el radio de curvatura. Esta es la primera curvatura de una curva espacial.

Si en vez del ángulo entre las tangentes, como esto ocurría para las curvas planas, y de la relación entre este ángulo y la longitud del arco entre los puntos de tangencia, se toma el ángulo formado por los planos de contacto (éste es igual al ángulo entre las binormales) y se divide este ángulo entre la longitud del arco entre los puntos examinados de la curva espacial, entonces, el valor límite de esta relación expresa la así llamada curvatura de torsión o segunda curvatura de la curva espacial. Recordemos que a las curvas espaciales se las llama también curvas de doble curvatura.

Si las tangentes a una curva espacial tienen una misma inclinación en todos los puntos de esta curva respecto a un plano cualquiera, entonces estas curvas se llaman curvas de igual pendiente.

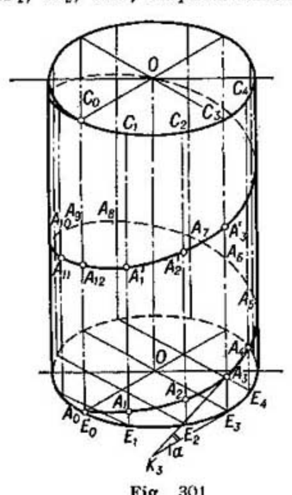
PREGUNTAS A LOS §§ 45—47

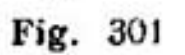
1. ¿En qué consiste la diferencia entre las curvas plana y espacial?
2. ¿Qué representa la proyección de una curva espacial?
3. ¿Qué representa la proyección de una curva plana?
4. ¿Qué representa la proyección de la tangente a una curva?
5. ¿Cómo se determina la longitud de cierta porción de una curva?
6. ¿A qué se le llama tangente a una curva?
7. ¿A qué se le llama normal en un punto cualquiera de una curva plana?
8. ¿Con qué se determina la suavidad de una curva plana?
9. ¿A cuáles curvas planas se les llama de contacto?
10. ¿Qué significa curva plana convexa?
11. ¿Por cuántas proyecciones se puede juzgar sobre el carácter de los puntos de una curva plana?
12. ¿A qué se le llama curvatura de una curva plana en cierto punto de ella?
13. ¿A qué es igual la curvatura de una circunferencia?
14. ¿Cómo construir una curva mixta similar a la elipse, conociendo los ejes de ésta?
15. ¿Cómo construir la tangente y la normal a una curva suave en cierto punto de ella y cómo hallar el centro de curvatura en este punto?
16. ¿Por cuántas proyecciones se puede juzgar sobre el carácter de los puntos de una curva espacial?
17. ¿A cuáles planos se les llama normal, de contacto y de rectificación en un punto cualquiera de una curva espacial?
18. ¿A qué se le llama normal principal y binormal en un punto cualquiera de una curva espacial?
19. ¿A qué se le llama primera y segunda curvatura de una curva espacial?
20. ¿Cómo se descifra la denominación de «curva de doble curvatura»?
21. ¿En cuál caso a la curva espacial se le llama curva de igual pendiente?

§ 48. LÍNEAS HELICOIDALES CILÍNDRICAS Y CÓNICAS

La línea helicoidal cilíndrica representa una curva espacial de igual pendiente. El filo de una cuchilla, al hacer ntacto con la superficie de un cilindro que gira uniformemente, deja en esta superficie una huella en forma de circunferencia. Si al mismo tiempo se le comunica a la cuchilla un movimiento de avance uniforme a lo largo del eje del cilindro, en la superficie de éste se obtendrá una línea helicoidal cilíndrica.

En la fig. 301 se muestra la formación de una línea helicoidal en la superficie de un cilindro como resultado del movimiento del punto A por la generatriz EC y del movimiento de giro de esta generatriz. Aquí vienen representadas varias posiciones de esta generatriz: E_0C_0, E_1C_1, ...; los arcos E_0E_1, E_1E_2, ... son iguales entre sí y cada uno de ellos es igual a $\frac{\pi d}{n}$, donde d es el diámetro del cilindro y n, el número de divisiones (en la fig. 301 $n=12$). La posición inicial del punto se ha designado con A_0, y las posiciones ulteriores, con A_1, A_2, etc., respectivamente.




Fig. 301

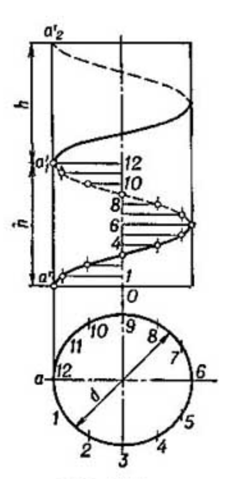


Fig. 302

Si durante el traslado de la generatriz de la posición E_0C_0 a la posición E_1C_1 el punto ocupa la posición A_1, entonces el segmento E_1A_1 determinará la distancia que ha recorrido el punto por la generatriz desde su posición inicial. Al ocupar la generatriz la siguiente posición (la E_2C_2) el punto se elevará a la altura $E_2A_2=2E_1A_1$ etc. Cuando la generatriz hace una vuelta entera, el punto se desplaza por ella a la distancia $E_0A_{12}=12E_1A_1$.

Al seguir girando la generatriz, el punto A comenzará a formar la *segunda espira* o *vuelta de la línea helicoidal*, ocupando la posición A'_1, A'_2, etc.

La distancia entre los puntos A_0 y A_{12} se llama *paso de la línea helicoidal*. El paso puede ser elegido en dependencia de unas u otras condiciones.

La distancia del punto A al eje OO se llama *radio de la línea helicoidal*, y el eje OO, *eje de la línea helicoidal*. El radio de la línea helicoidal es igual a la mitad del diámetro del cilindro circular recto en cuya superficie lateral está situada la línea helicoidal. El diámetro del cilindro y la dimensión del paso son los *parámetros*[1] que determinan a la línea helicoidal cilíndrica en la superficie lateral de un cilindro circular recto.

En la fig. 302 se ha cumplido la construcción de las proyecciones de una línea helicoidal cilíndrica. Preliminarmente se han construido las proyecciones del cilindro circular recto. La circunferencia de la base del cilindro (en la proyección horizontal) y el paso (el segmento h llevado al eje del cilindro en la proyección frontal) se han dividido en igual número (n) de partes; en la fig. 302 se ha tomado $n=12$. La posición inicial del punto A se indica con las

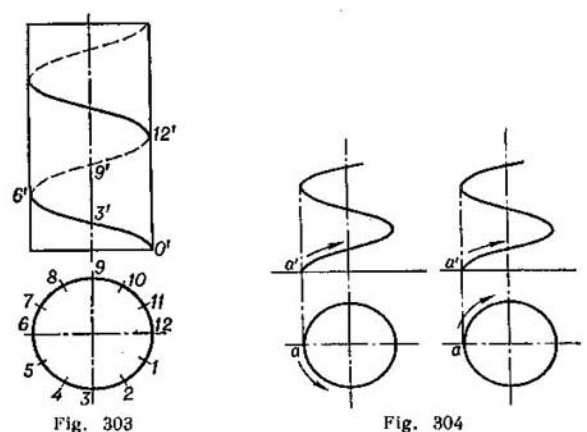


Fig. 303 Fig. 304

proyecciones a' y a, este último es el punto denotado con la cifra O en la circunferencia.

Dado que el eje del cilindro está dirigido perpendicularmente al plano H, la proyección horizontal de la línea helicoidal se confunde con la circunferencia que representa la proyección horizontal de la superficie del cilindro. En lo que se refiere a la construcción de la proyección frontal de la línea helicoidal, la marcha de su construcción está clara de la fig. 302 y se deriva de la propia formación de la línea helicoidal como la trayectoria de un punto que realiza dos movimientos, un movimiento uniforme en línea recta y al mismo

[1] El parámetro es una magnitud cuyos valores numéricos permiten separar un elemento determinado entre los elementos del mismo género.

tiempo movimiento giratorio uniforme alrededor del eje paralelo a esta recta.

La proyección sobre un plano, paralelo al eje del cilindro, en el caso dado la proyección frontal de la línea helicoidal cilíndrica, es semejante a una *sinusoide*.

En la fig. 302, la proyección frontal de la línea helicoidal tiene en la parte delantera (visible) del cilindro *elevación de izquierda a derecha* o *descenso hacia la izquierda*; si el eje del cilindro se dispone horizontalmente, entonces la elevación de la línea helicoidal es de derecha a izquierda, y el descenso hacia la derecha. Esta es una línea helicoidal con *paso a la derecha* o *línea helicoidal dextrorsa*. En la fig. 303 se muestra una línea helicoidal con *paso a la izquierda* (*línea helicoidal sinistrorsa*): la elevación en la proyección frontal de la línea helicoidal en la parte delantera (vista) del cilindro va de derecha a izquierda, el descenso hacia la derecha; si el eje del cilindro se dispone horizontalmente; la elevación será a la derecha, y el descenso hacia la izquierda.

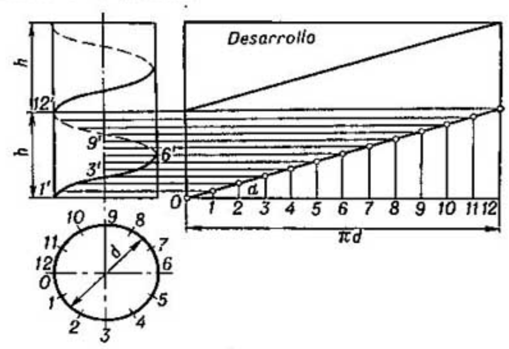


Fig. 305

Si la línea helicoidal se representa sin el cilindro y sin las proyecciones de los puntos, la indicación sobre si es la línea helicoidal dextrorsa o sinistrorsa debe darse con palabras o con flechas, así como se muestra en la fig. 304 a la izquierda para una línea helicoidal dextrorsa, y a la derecha, para una sinistrorsa [1].

El desarrollo de la espira de una línea helicoidal cilíndrica se muestra en la fig. 305. En forma desarrollada cada espira representa el segmento de una recta. Esto se desprende de la formación de la línea helicoidal: por cuanto la circunferencia de la base del cilindro

[1] La línea helicoidal cilíndrica se ilustra muy bien en un muelle salomónico, en las roscas de los pernos, en los tornillos, en los espárragos y en el tornillo sin fin cilíndrico.

se dividió en partes iguales y el paso de la línea helicoidal fue dividido en un mismo número de partes iguales, el desarrollo de la línea helicoidal en toda la extensión de su paso puede considerarse como el lugar geométrico de los puntos, para cada uno de los cuales la ordenada es proporcional a la abscisa, es decir, $y=kx$. Esta es la ecuación de una línea recta.

Las tangentes a la línea helicoidal coinciden en el desarrollo con la recta en la que se desarrolla la espira de la línea helicoidal.

En la fig. 305, para el caso de dos pasos de la línea helicoidal, se han obtenido dos segmentos de ésta bajo un ángulo α a la recta que representa a la circunferencia desarrollada de la base del cilindro. La pendiente de la línea helicoidal se expresa con la fórmula

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\pi d},$$

donde h es el paso de la línea helicoidal y d, el diámetro del cilindro. El ángulo α se llama *ángulo de espira* o *ángulo de paso.*

La longitud de una vuelta (espira) de la línea helicoidal es igual a

$$L = \sqrt{h^2 + (\pi d)^2}.$$

Para un mismo diámetro d, el ángulo α depende solamente del paso de la línea helicoidal; para obtener un ángulo de paso pequeño debe tomarse un paso pequeño, y viceversa. Si para el caso de cilindros de distinto diámetro el paso permanece invariable, el ángulo de paso será tanto menor, cuanto mayor sea el diámetro del cilindro.

Se puede construir el modelo de la línea helicoidal si se toma un rectángulo con la diagonal dibujada en él y se arrolla en forma de un cilindro circular recto; en este caso, la diagonal del rectángulo forma una espira de la línea helicoidal. Evidentemente, la línea helicoidal es la distancia más corta entre dos puntos de la superficie lateral de un cilindro circular: es la *línea geodésica de esta superficie.*

En efecto, en la superficie de tal cilindro, entre dos puntos se puede trazar una infinidad de líneas. Una de estas líneas expresa la distancia más corta entre estos puntos. Al desarrollar la superficie tal línea se desarrolla en una recta. Esto es propio de las líneas de la superficie llamadas geodésicas.

Examinemos la siguiente propiedad de una línea helicoidal cilíndrica.

Supongamos (fig. 301) que a la línea helicoidal, en un punto cualquiera A_8 de ésta, se ha trazado una tangente que corta al plano H en el punto K_3.

El ángulo entre la línea helicoidal y cualquier generatriz del cilindro se expresa por el ángulo entre esta generatriz y la tangente (a la línea helicoidal) trazada en el punto común para la línea helicoidal y la generatriz. El desarrollo en la fig. 305 muestra que entre la línea helicoidal dada y la generatriz del cilindro se obtiene un ángulo constante, es decir, *todas las tangentes a la línea helicoidal*

tienen una misma inclinación a las generatrices del cilindro y cortan al plano H bajo un mismo ángulo α. Este mismo ángulo se obtuvo entre los desarrollos de la línea helicoidal y la circunferencia de la base.

Al desarrollar la superficie lateral del cilindro con la línea helicoidal dibujada en ésta, por ejemplo, el elemento $A_0A_3E_3$ (fig. 301) adquiere la forma del triángulo rectángulo $K_3A_3E_3$, en el que K_3A_3 es la tangente a la línea helicoidal en el punto A_3, y K_3E_3 es la proyección de la tangente sobre el plano de la base del cilindro, o sea, la tangente a la circunferencia de su base. De aquí se desprende que el punto K_3 pertenece a la evolvente de la circunferencia, puesto que las tangentes en todos los puntos de la línea helicoidal cilíndrica tienen las trazas en el plano de la base del cilindro que forman la evolvente de la circunferencia de la base de este cilindro.

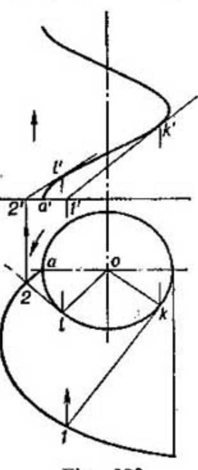


Fig. 306

Aprovechemos esta circunstancia para la construcción de la tangente a la línea helicoidal cilíndrica en un punto cualquiera de ella. En la línea helicoidal representada en la fig. 306, la tangente se ha construido en el punto *K*. Ante todo se ha trazado la proyección horizontal de la tangente (el segmento *k1*) perpendicularmente a *ok*. Con ayuda del punto *1* en la evolvente se ha hallado la proyección *1'*, después de lo cual puede trazarse la proyección frontal de la tangente (la recta *1'k'*). La construcción se ha repetido para el punto *L*.

Se puede construir en la superficie del cilindro una curva formada de la misma manera que la línea helicoidal, pero dejando el giro de la generatriz del cilindro uniforme y haciendo el desplazamiento del punto por la generatriz *alterno* por una ley cualquiera. Estas curvas se llaman a veces *líneas helicoidales de paso variable*.

La construcción de tales curvas se da en la fig. 307 para el caso de movimiento uniformemente acelerado del punto por la generatriz. Vienen dados los desplazamientos del punto en cada una de las doce posiciones indicadas de la generatriz; por ejemplo, al pasar a la novena posición el punto se desplazará en el segmento C_9E_9 (contando a partir de la octava posición de este punto).

En la fig. 307 se da también el desarrollo de la línea construida; el ángulo de paso es variable.

Si el punto se desplaza uniformemente por la generatriz de un cono circular recto y la generatriz realiza un movimiento de giro alrededor del eje del cono con una velocidad angular constante, la

trayectoria del punto es una *línea helicoidal cónica* [1]; sus proyecciones se representan en la fig. 308. Los desplazamientos del punto por la generatriz son proporcionales a los desplazamientos angulares de esta generatriz. En la fig. 308 se dan en la superficie del cono doce posiciones de la generatriz y en estas posiciones vienen indicadas las posiciones correspondientes del punto. La distancia entre los puntos de las espiras contiguas $A_0A_{12}=h$, medida por la generatriz, se llama *paso de la línea helicoidal cónica* [2].

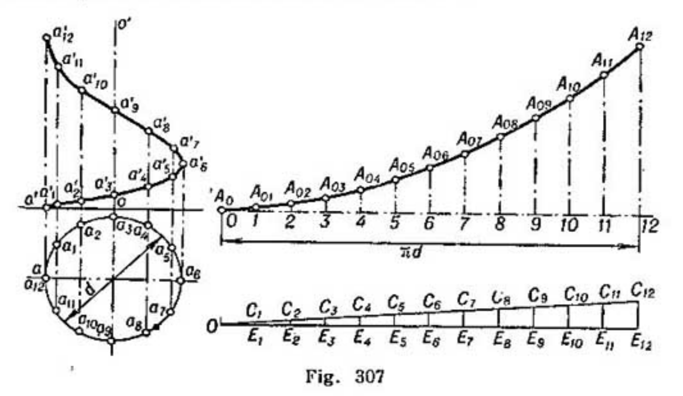


Fig. 307

La proyección de la línea helicoidal cónica sobre el plano paralelo al eje del cono (en el caso en cuestión la proyección frontal) representa una *sinusoide* con altura de onda decreciente; la proyección sobre el plano perpendicular al eje del cono (en el caso dado la proyección horizontal) representa una *espiral de Arquímedes*.

En el desarrollo de la superficie lateral del cono (fig. 308 a la derecha), la línea helicoidal se desarrolla también en una espiral de Arquímedes, puesto que al desplazamiento angular uniforme del radio le corresponde en el desarrollo de la superficie del cono un desplazamiento uniforme del punto por este radio. En el dibujo se muestra el desarrollo para dos vueltas de la línea helicoidal cónica.

---

[1] La línea helicoidal cónica se ilustra muy bien, por ejemplo, en un muello helicoidal cónico y en una rosca cónica.

[2] El paso de la línea helicoidal cónica se cuenta a veces por su eje. El segmento h_1 (fig. 308) se considera como la proyección del paso h, medido por la generatriz, sobre el eje de la línea helicoidal. La división de h en n partes iguales corresponde a la división de h_1 en la misma cantidad de partes iguales entre sí, y viceversa.

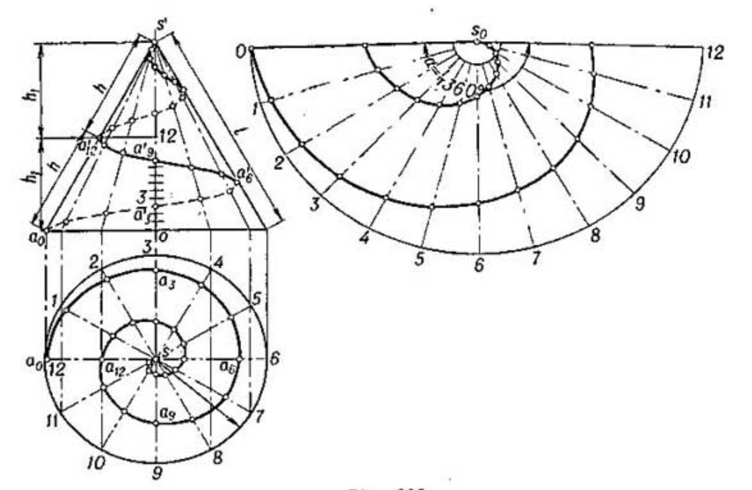


Fig. 308

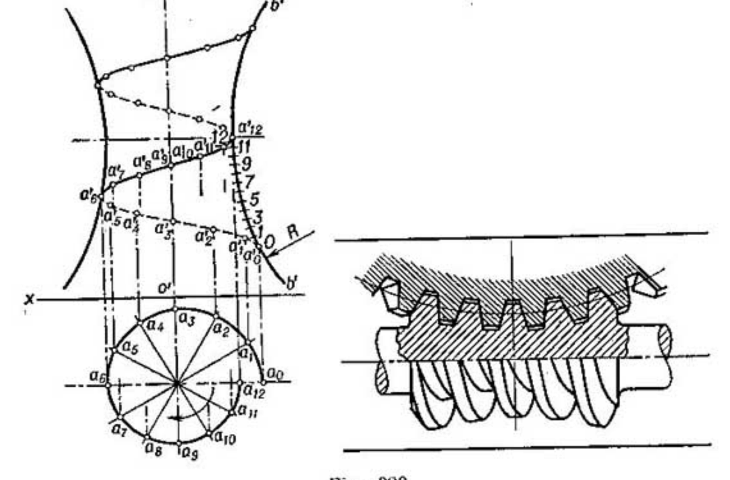


Fig. 309

La línea helicoidal puede ser construida no solamente en una superficie cilíndrica o cónica. Como ejemplo puede servir la línea helicoidal (fig. 309) en la superficie formada con el giro del arco *BB* alrededor del eje *OO*, es decir, en la superficie de un *toro*. Una línea helicoidal semejante se puede ver en los tornillos sin fin globoidales (véase la fig. 309, a la derecha).

PREGUNTAS AL § 48

1. ¿Cómo se forman las líneas helicoidales cilíndricas y cónicas?
2. ¿A qué se le llama paso de una línea helicoidal: cilíndrica y cónica?
3. ¿Qué forma tienen las proyecciones de las líneas helicoidales cilíndrica y cónica sobre los planos: paralelo al eje de la línea helicoidal y perpendicular a este eje?
4. ¿Cómo distinguir si la línea helicoidal dibujada en la superficie de unas barras cilíndrica y cónica es dextrorsa o sinistrorsa? ¿Cómo señalar el paso si se representa solamente la línea?
5. ¿En qué se desarrolla cada espira de una línea helicoidal: cilíndrica y cónica?
6. ¿Cómo se expresa la pendiente de una línea helicoidal cilíndrica?
7. ¿Qué línea se forma en el plano perpendicular al eje de una línea helicoidal cilíndrica si se construyen las trazas de las tangentes a esta línea?

VIII
CAPÍTULO

SUPERFICIES CURVAS

§ 49. CONOCIMIENTOS GENERALES SOBRE LAS SUPERFICIES CURVAS

1. Podemos darnos idea de la superficie, considerándola como la parte común de dos zonas contiguas del espacio. En la Geometría Descriptiva la superficie se define como la traza de una línea o de otra superficie en movimiento. La idea de superficie como el conjunto de todas las posiciones consecutivas de cierta línea que se mueve en el espacio es cómoda para las construcciones gráficas [1]. Claro está, que al representar una superficie nos limitamos a dibujar esta línea solamente en algunas de sus posiciones.

La idea de la generación de la superficie como resultado del movimiento continuo permite llamar a tales superficies *cinemáticas* [2].

La línea que engendra la superficie, en toda posición de ésta se llama *generatriz*. Habitualmente, se señala toda una serie de posiciones de la generatriz. Se suele decir: «generatrices», «tracemos la generatriz», etc., comprendiendo bajo estas palabras las diferentes posiciones de la generatriz. La línea generatriz puede ser recta o curva.

Así pues, la superficie cinemática representa el lugar geométrico de las líneas que se mueven en el espacio con arreglo a cualquier ley.

---

[1] En este caso, la línea que genera la superficie puede deformarse durante el movimiento. Entonces se habla de la superficie con «generatriz variable». Por ejemplo, la superficie lateral de un cono circular se puede obtener girando una circunferencia de modo tal, que su centro se desplace uniformemente en línea recta (por el eje del cono) del vértice a la base, y simultáneamente con este movimiento aumenta regularmente el radio.

[2] En el apartado de la Mecánica llamado «Cinemática», el movimiento se examina sólo desde el punto de vista geométrico, independientemente de las causas físicas o fuerzas que lo provocan.

La superficie generada con arreglo a tal ley se llama *regular*, a diferencia de las *irregulares* (o aleatorias).

2. La superficie que puede ser engendrada por una recta, se llama *superficie reglada*. La superficie reglada representa el lugar geométrico de líneas rectas. La superficie para la cual solamente la línea curva puede ser su generatriz, se llama *superficie no regrlada* (*superficie curva*) [1].

En la fig. 310 se dan algunos ejemplos de superficies regladas. La superficie representada a la izquierda está generada por la recta A_1A_2 que, permaneciendo constantemente paralela a la recta S_1S_2, se desliza por cierta línea fija $T_1T_2T_3$ llamada *directriz*.

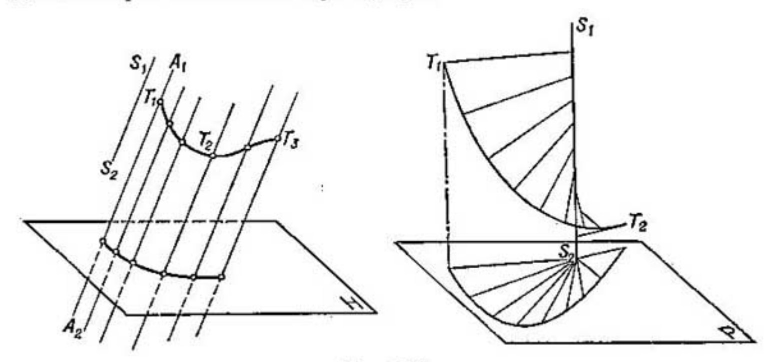


Fig. 310

Es evidente que tal superficie se generará si se considera la línea invariable $T_1T_2T_3$ como generatriz cuyos puntos se desplazan por rectas paralelas a la línea directriz S_1S_2. Claro está que la curva deberá corresponder en todas sus posiciones a las condiciones de igualdad y paralelismo de las curvas, es decir, a la coincidencia de una con otra al ser superpuestas y al paralelismo recíproco de las tangentes trazadas a la curva en un mismo punto de ella en las posiciones consecutivas.

La superficie representada en la fig. 310, a la derecha, está engendrada por una línea recta que, permaneciendo paralela al plano P, se desliza por dos *directrices* fijas: la recta S_1S_2 y la curva T_1T_2.

Como ejemplo de superficie curva (no reglada) sirve la esfera (con otras palabras, superficie esférica).

---

[1] La denominación de «superficies regladas» se debe vincular con la idea de rectitud («regla», «trazado de rectas con ayuda de una regla») y no con el término de «línea».

3. Una misma superficie puede ser generada por el desplazamiento de diferentes líneas y de acuerdo a distintas condiciones que debe cumplir la generatriz en su desplazamiento. Por ejemplo, la superficie lateral de un cilindro circular recto (fig. 311) puede ser examinada como el resultado de un desplazamiento determinado de la generatriz (la recta A_1A_2) o como resultado del desplazamiento de una circunferencia cuyo diámetro se desplaza por la recta O_1O_2, y el plano determinado por esta circunferencia es perpendicular a O_1O_2. En la fig. 311 se muestra además la curva $T_1T_2T_3$ en el mismo cilindro; todos sus puntos son equidistantes de la recta O_1O_2. Podemos darnos idea de la generación de la superficie lateral de este cilindro también como resultado del giro de la línea $T_1T_2T_3$ alrededor del eje O_1O_2.

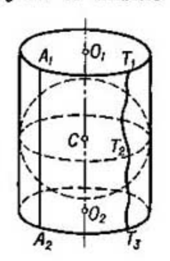


Fig. 311

En general, las leyes de generación de una superficie pueden ser muy diversas; entre estas leyes y forma de las generatrices es deseable elegir las más simples o cómodas para la representación de las superficies y resolución de los problemas relacionados con las mismas. Si nos imaginamos un conjunto de generatrices rectilíneas y un conjunto de generatrices de circunferencias (fig. 311), cada línea de un conjunto (de una «familia» de líneas) cortará a todas las líneas del otro conjunto (de la otra «familia» de líneas), como resultado de lo cual se obtiene la red (*estructura*) de dada superficie. Tal representación puede ser extendida también para otras superficies.

4. Sobre el ejemplo de la superficie lateral del cilindro (fig. 311) examinemos la generación de esta superficie como resultado del desplazamiento de una esfera cuyo centro C se mueve por la recta O_1O_2. Aquí la generatriz no es una línea, sino una superficie (una esfera). La superficie obtenida (la superficie lateral del cilindro) envuelve a la superficie generatriz (a la esfera) en todas sus posiciones. Además, ambas superficies hacen contacto por una circunferencia en cada posición de la esfera.

Si el centro de la esfera se desplazase por cierta curva, entonces, claro está, se generaría otra superficie envolvente, y no la mostrada en la fig. 311 (véase la fig. 349).

Así pues, la generación de una superficie puede ser examinada también como resultado del desplazamiento de cierta superficie generatriz, con la particularidad de que ésta puede ser invariable o variar continuamente con arreglo a cualquier ley durante su movimiento.

5. Algunas superficies curvas pueden ser desarrolladas de ta modo que todos sus puntos coincidan con un plano sin sufrir deformación alguna (por ejemplo, discontinuidades, pliegues). Además, cada punto en el desarrollo corresponde al único punto de la superficie;

las líneas rectas pertenecientes a la superficie permanecen rectas; los segmentos de las rectas conservan su longitud; el ángulo formado por la líneas en la superficie se conserva igual al ángulo entre las correspondientes líneas en el desarrollo; el área de una zona cerrada cualquiera en la superficie conserva su magnitud dentro de la correspondiente zona cerrada en el desarrollo[1].

A tales superficies las llamaremos *desarrollables. A éstas se refieren solamente las superficies regladas, y además, aquellas en las que las generatrices rectilíneas adyacentes son paralelas o se cortan, o son tangentes a cierta curva espacial.*

Todas las superficies curvas no regladas y aquellas regladas que no pueden ser desarrolladas sobre un plano se llaman *alabeadas.*

§ 50. EXAMEN DE CIERTAS SUPERFICIES CURVAS, SU DETERMINACIÓN Y REPRESENTACIÓN EN EL DIBUJO

Representar una superficie en el dibujo significa indicar los datos que permiten construir cada punto de esta superficie. Para expresar una superficie basta tener las proyecciones de la línea directriz e indicar cómo se construye la línea generatriz que pasa por cualquier punto de la directriz [2]. Pero si se le quiere dar a la representación mayor claridad y un carácter más expresivo, se dibuja además el contorno de la superficie, varias posiciones de la generatriz, los puntos y líneas más importantes de la superficie, etc.

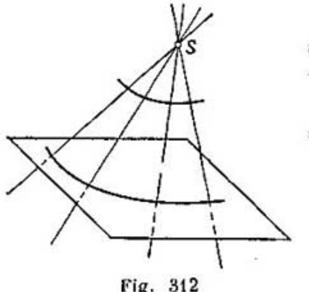


Fig. 312

A. Superficies regladas desarrollables

1. Cilíndricas y cónicas. *La superficie cilíndrica* se genera por una línea recta que conserva en todas sus posiciones el paralelismo a cierta recta dada y que pasa consecutivamente por todos los puntos de cierta curva que es la *directriz* (véase la fig. 310, a la izquierda).

La superficie cónica se genera por una línea recta que pasa por cierto punto fijo y consecutivamente por todos los puntos de cierta *directriz* curvilínea (véase la fig. 312). El punto fijo S se llama *vértice* de la superficie cónica.

[1] Hacemos recordar, que se llama ángulo de dos curvas que se cortan al ángulo entre las tangentes a estas curvas en el punto de su intersección.

[2] En calidad de directriz frecuentemente se toma la línea de intersección de la superficie dada con el plano H.

Si se aleja el punto S al infinito, la superficie cónica se transforma en cilíndrica.

Las superficies cilíndricas y cónicas pueden intersecar al plano de proyección; se obtiene una línea llamada *traza de la superficie* en el plano de proyección dado. En la fig. 313 vienen dadas una superficie cilíndrica expresada por la curva directriz $A_1B_1C_1$ y la dirección de la generatriz ST, y una superficie cónica (a la derecha) expresada por la curva directriz $K_1M_1N_1$ y el vértice S. En ambos casos se han construido las trazas de las superficies sobre el plano H, es decir, las líneas que pasan por las trazas horizontales de las generatrices de la superficie dada (las curvas $a'b'c'$, abc y $k'm'n'$, kmn).

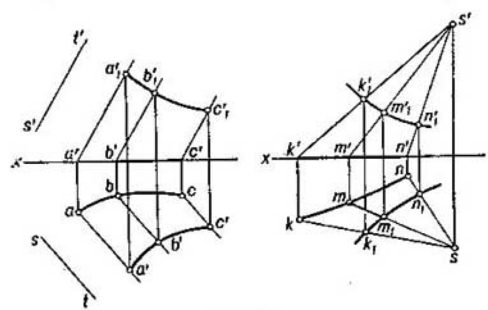


Fig. 313

La superficie cilíndrica puede ser dada por su traza sobre el plano H y la dirección de la directriz; la superficie cónica, por su traza sobre el plano H y el vértice. Dándonos un punto sobre la traza podemos construir la correspondiente generatriz de la superficie.

Para construir el contorno de una superficie cilíndrica o cónica, se debe señalar en cada uno de los planos de proyección las «generatrices límites» que delimitan la zona dentro de la cual se encuentra la proyección de la superficie. Así, por ejemplo, en la fig. 314, a la izquierda, se han señalado sobre la traza de la superficie cilíndrica los puntos por los que pasan las proyecciones de las generatrices límites: a', a y b', b (para la proyección frontal) y c', c y d', d (para la proyección horizontal). Con ayuda de estos límites y las líneas de interrupción se determinan los contornos de las proyecciones y se realiza la delimitación de las partes vista y oculta de la superficie en las proyecciones (véanse las líneas llenas y de trazos en la fig. 314).

En la fig. 314, a la derecha, se han efectuado construcciones análogas para una superficie cónica. Aquí, ambas proyecciones de la generatriz SB han resultado límites, una para la proyección frontal y la otra para la proyección horizontal del cono.

De acuerdo a las indicaciones generales (véase el comienzo de este parágrafo), los puntos en las superficies cilíndrica y cónica pueden ser construidos con auxilio de las generatrices que pasan por los mismos. En algunos casos, al formular el problema, es necesario señalar si se considera el elemento buscado visto u oculto[1].

En la fig. 314 se muestra la construcción de la proyección horizontal del punto E perteneciente a una superficie cilíndrica y dado por su proyección e'; de acuerdo con los datos del problema el punto

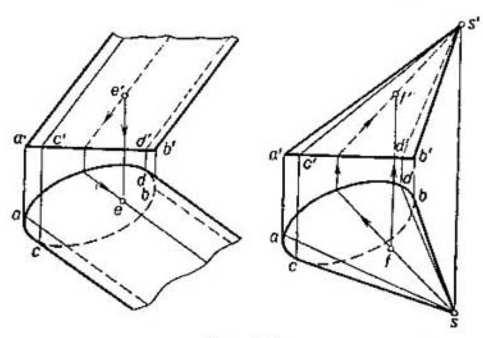


Fig. 314

E está oculto sobre el plano V. Se da también un ejemplo de la construcción de la proyección frontal del punto F perteneciente a una superficie cónica y expresado por su proyección f, con la condición de que este punto es visto sobre el plano H. En ambos casos la construcción se ha realizado con auxilio de la correspondiente generatriz; la marcha de la construcción está indicada con flechas.

Si la curva directriz (dispuesta en el espacio o que representa la traza de la superficie sobre el plano de proyección) se sustituye por una *quebrada* inscrita en dicha curva, entonces la superficie cilíndrica se sustituye por una *prismática*, y la superficie cónica, por una *piramidal* (las caras de un ángulo poliédrico). Tal relación entre estas superficies se utilizará en las construcciones ulteriores (por ejemplo, al desarrollar las superficies cilíndricas y cónicas, véase el § 68).

Las superficies cilíndricas se distinguen por la forma de la sección normal, es decir, por la curva obtenida al intersecar esta superficie con un plano perpendicular a sus generatrices.

[1] Tales indicaciones se hacen a veces tomando entre paréntesis la correspondiente proyección. Por ejemplo, (e') significa que el punto E se encuentra en la parte de la superficie, considerada oculta sobre el plano V

Destaquemos el caso cuando la sección normal de una superficie cilíndrica representa una curva de segundo orden[1]. Tal superficie cilíndrica se refiere a las *superficies de segundo orden*. Los puntos de cualquier superficie de segundo orden satisfacen en las coordenadas cartesianas espaciales a la ecuación de segundo orden. *Cualquier plano corta a tal superficie según una curva de segundo orden*[2]. Una recta corta a una superficie de segundo orden siempre en dos puntos.

Según la forma de su sección normal, el cilindro de segundo orden puede ser *elíptico* (en el caso particular, *circular*), *parabólico* e *hiperbólico*. La superficie lateral del *cilindro circular recto*, conocido de la Estereometría, es una superficie de segundo orden. De todos los cilindros mencionados, solamente en el circular se puede inscribir una esfera.

Si la sección normal es una línea geométrica indefinida, entonces es un *cilindro de forma general*.

La superficie cónica que se corta por un plano según una curva de segundo orden, es una superficie de segundo orden (*cono de segundo orden*).

En la Estereometría se examina el cono circular recto. Por su vértice pasa una infinidad de planos de simetría de este cono. Estos

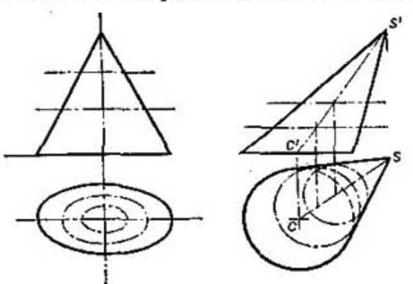


Fig. 315

planos se cortan según una recta que es el eje del cono. En tal cono se puede inscribir una esfera. La superficie lateral de un cono circular recto es una superficie de segundo orden.

Claro está, que el eje del cono circular puede ocupar cualquier posición con respecto a los planos de proyección, que se puede llevar a la más simple (por ejemplo, a la perpendicular al plano H).

En la fig. 315, a la izquierda, viene dado un cono que tiene un sistema de elipses semejantes y semejantemente situadas[3] (en la

[1] Sobre las curvas de segundo orden véase el § 21.
[2] Sobre los casos de intersección según rectas véase más adelante.
[3] Son elipses semejantes y semejantemente situadas las elipses con ejes proporcionales y respectivamente paralelos.

fig. 315 estas elipses están situadas en planos paralelos al plano H). A tal cono se le llama *elíptico*. Claro está, que en él, como en todo cono de segundo orden, las secciones producidas por planos que no pasan por el vértice son circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas, y cada una de estas líneas puede ser adoptada como directriz. Por esta razón, la denominación de «elíptico» no debe comprenderse como indicación de que es preferible elegir la elipse en calidad de directriz.

Podemos darnos idea del cono elíptico considerándolo como un cono circular recto transformado mediante su compresión regular en el plano de la sección axial. Sobre las secciones circulares de tal cono véase el § 63.

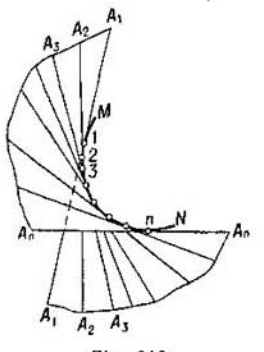


Fig. 316

El cono representado en la fig. 315, a la derecha, tiene como base un círculo, lo mismo que el cono circular recto, pero la proyección del vértice sobre el plano de la base no coincide con el centro del círculo. Tal cono se llama *circular oblicuo*. Intersecando su superficie lateral con planos paralelos al plano de la base obtenemos circunferencias cuyos centros están situados sobre la recta que pasa por el vértice y el centro de la base del cono (en la fig. 315 la recta SC).

2. La superficie llamada *superficie con arista de retroceso* se engendra por el movimiento continuo de una generatriz rectilínea que hace contacto en todas sus posiciones con cierta curva espacial. Esta curva espacial es la *generatriz* de la superficie y se llama *arista de retroceso.*

Tal superficie se muestra en la fig. 316; sus generatrices A_1A_1, A_2A_2, etc. son tangentes a la curva espacial MN. La arista de retroceso divide a la superficie en dos cavidades (lo que corresponde a la división de cada tangente en su punto de contacto en dos partes).

Evidentemente, dándose las proyecciones de la arista de retroceso se puede expresar la superficie en el dibujo. Por ejemplo, tomando una línea helicoidal cilíndrica (véase el § 48) en calidad de arista de retroceso y trazando una serie de tangentes a ésta definimos la superficie, y si el eje de la línea helicoidal se dispone perpendicularmente al plano H, la superficie engendrada representará una superficie de igual pendiente (con respecto al plano H), puesto que todas las tangentes a la línea helicoidal cortan al plano H bajo un mismo ángulo (véase la pág. 188). El dibujo de tal superficie (de una de sus cavidades) se muestra en la fig. 317, donde al arco ABC de la línea helicoidal cilíndrica se han trazado unas cuantas

tangentes con auxilio de la evolvente $a1_0 2_0 3_0 4_0$ como el lugar geométrico de las trazas horizontales de las tangentes (véase la fig. 306). El elemento construido de la superficie está dirigido con su convexidad hacia el observador.

En la misma figura se muestra la construcción de la proyección k' del punto K perteneciente a la superficie dada, con ayuda de la proyección k. Trazando por el punto k una tangente a la semicircunferencia abc, por medio de los puntos 4_0 y 4 hallamos sus proyecciones frontales $4'_0$ y $4'$ y, al mismo tiempo, la proyección de la tangente en la que está situado el punto K. La línea de referencia trazada a partir del punto k determina la proyección buscada k'.

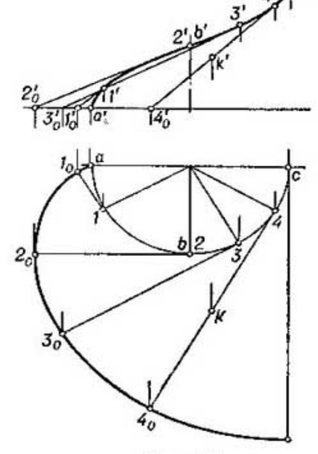


Fig. 317

Si fuese dada la proyección frontal de cierto punto perteneciente a la superficie dada y se exigiese hallar su proyección horizontal, sería necesario trazar al nivel de la proyección frontal dada un plano y cortar a éste con una superficie (sobre la intersección de superficie y plano véase más adelante el § 55 y otros). La proyección horizontal buscada del punto deberá pertenecer a la proyección horizontal de la línea de corte. En el caso en cuestión se debería tomar un plano horizontal secante; este plano cortará a la superficie que se examina según la evolvente.

Las superficies cilíndrica y cónica pueden ser consideradas como engendradas de una superficie con arista de retroceso con la condición de que la arista de retroceso representa un punto, en el primer caso infinitamente alejado, y en el segundo, situado a una distancia finita.

En el caso de una curva plana como superficie directriz, determinada por las tangentes a tal curva, representa un plano.

Al intersecar una superficie con arista de retroceso por un plano que no pasa por la generatriz, se obtiene una curva con punto de retroceso (véase la pág. 200) situado sobre la arista de retroceso. De aquí la denominación de «arista de retroceso».

B. Superficies regladas alabeadas

1. Superficies con plano de paralelismo. 1.1. *Cilindroides* y *conoides.* La superficie llamada *cilindroide* se genera al desplazarse una

recta que conserva en todas sus posiciones el paralelismo con cierto plano dado (*«plano de paralelismo»*) y que corta a dos líneas curvas (a dos *directrices*).

Si las directrices son curvas planas, entonces, claro está, no deben ser coplanares.

En la fig. 318 se muestra un cilindroide engendrado por el movimiento de la recta AD por las directrices ABC y DEF paralelamente al plano de paralelismo P (en este caso, un plano proyectante horizontal). Como se ve, para la construcción del dibujo se debían tener dadas las proyecciones de las directrices y la posición del plano de paralelismo.

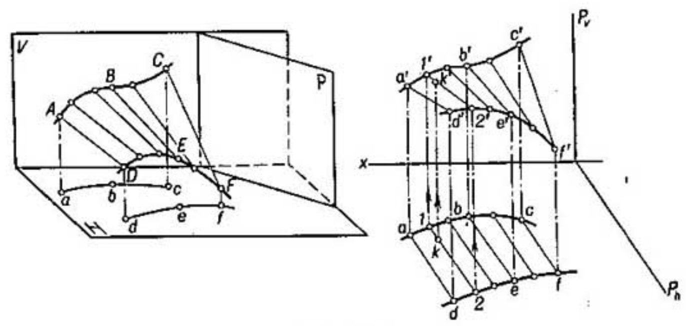


Fig. 318

La superficie llamada *conoide* se engendra por el movimiento de una recta que conserva en todas sus posiciones el paralelismo con cierto plano dado (*«plano de paralelismo»*) y que corta a dos *directrices*, una de las cuales es curva y la otra es una recta (si la curva es plana, ella no deberá pertenecer a un mismo plano que la segunda generatriz recta).

El conoide se muestra en la fig. 319. En calidad de plano de paralelismo se ha tomado el plano H. La generatriz (una recta) corta a la curva AFB y a la recta CD, situada en este caso perpendicularmente al plano H[1].

Todo plano paralelo al «plano de paralelismo» corta al cilindroide y al conoide según una recta. De aquí que, si se exige construir una generatriz cualquiera del cilindroide o del conoide, hay que trazar un plano, correspondiente al problema, que sea paralelo al plano de

[1] Son conoides, por ejemplo, las superficies $SACDS$ y $SBCDS$ en la fig. 265, que, junto con los triángulos ASB y ABC, delimitan al cuerpo representado en esta figura.

paralelismo, hallar los puntos de intersección de las directrices de la superficie con este plano y por estos puntos trazar una recta que será la generatriz buscada. En el caso particular representado en la fig. 319, para construir la generatriz del conoide, que pasa por el punto E de la recta directriz, se puede prescindir del plano secante auxiliar, puesto que la proyección frontal de la generatriz deberá ser paralela al eje x. Basta trazar $e'f' \| x$, con ayuda del punto f' hallar el punto f y la proyección horizontal ef.

En la fig. 318, a la derecha, se muestra la determinación de la proyección k' del punto K perteneciente a un cilindroide, si está dada la proyección k. Por el punto k se ha trazado un plano (no se

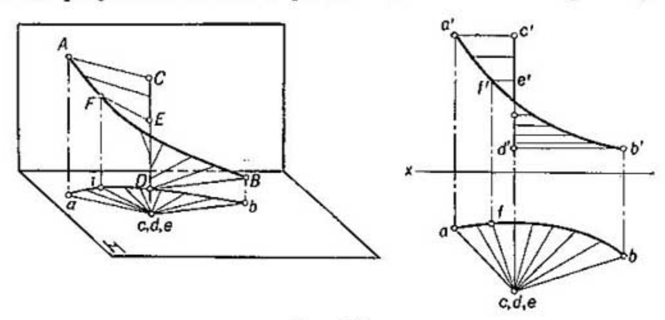


Fig. 319

muestra en el dibujo) paralelo al plano de paralelismo P. Como resultado de la intersección obtenemos la recta con las proyecciones $1-2$, $1'2'$ y la proyección k' sobre $1'2'$.

Si viene dada la proyección frontal de un punto cualquiera perteneciente a un cilindroide y hay que hallar su proyección horizontal se procede como fue explicado en esta página, a saber: se traza cierto plano que corte al cilindroide de tal manera que el punto se encuentre en este plano. Por ejemplo, el cilindroide representado en la fig. 318 se debería cortar con un plano horizontal al nivel de la proyección frontal dada del punto, construir la proyección horizontal de la línea de intersección y en ella la proyección horizontal buscada del punto.

De modo análogo se debe proceder en el caso de la construcción de las proyecciones de un punto en el conoide.

1.2. *Paraboloide hiperbólico (plano oblicuo)*. En la fig. 320 se da el dibujo de la superficie llamada *plano oblicuo* o *paraboloide hiperbólico*. La generación de esta superficie puede ser considerada como resultado del movimiento de una generatriz rectilínea por dos directrices (dos rectas que se cruzan) paralelamente a cierto plano de

paralelismo. En la fig. 320 el plano de paralelismo es el plano de proyección H, y las directrices, las rectas AB y CD.

En la misma figura se muestra la construcción de la proyección k con auxilio de la proyección frontal dada k' del punto perteneciente a un plano oblicuo. La tarea se reduce al trazado de la proyección

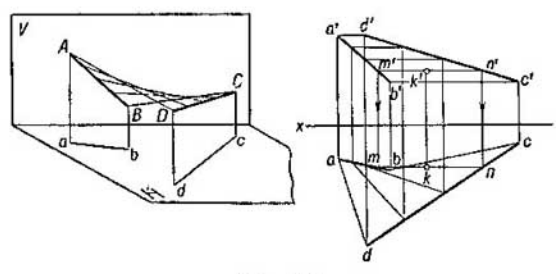


Fig. 320

frontal $m'n'$ de la generatriz al nivel del punto k correspondientemente al plano de paralelismo dado.

Si se conociese la proyección k, entonces, para hallar la proyección k' habría que trazar cierto plano secante de tal modo que pasara en el espacio por el punto K, es decir, proceder así como fue expuesto más arriba para la superficie con curva de retroceso (pág. 201).

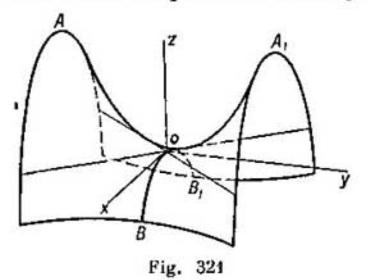


Fig. 321

En la Geometría Analítica se demuestra que el paraboloide hiperbólico puede ser también obtenido como resultado de tal movimiento de la parábola BOB_1 (fig. 321), cuando su eje de simetría permanece paralelo al eje z, el vértice se desplaza por la parábola AOA_1 y el plano de la parábola BOB_1 permanece paralelo al plano xOz. En la intersección del paraboloide hiperbólico con un plano paralelo a xOy se obtiene una hipérbola (si tal plano pasa por el vértice O, el paraboloide hiperbólico se corta según dos rectas que pasan por el punto O). Los planos paralelos a xOz y yOz cortan al paraboloide hiperbólico según parábolas. Con esto está relacionada la denominación de la superficie «paraboloide hiperbólico».

En la fig. 322 viene representado un plano oblicuo generado por el movimiento de la generatriz rectilínea AB por la rectas que se

cruzan AD y BC, dispuestas en planos recíprocamente paralelos, siendo dado el plano de paralelismo P. Evidentemente, se obtendrá la misma superficie, si en calidad de generatriz se toma la recta AD y se le hace desplazarse por las directrices AB y CD paralelamente al plano P_1. De aquí se desprende que por cualquier punto de un plano oblicuo se pueden trazar dos rectas pertenecientes a este plano.

En la fig. 322 se ve una parábola correspondiente a la parábola AOA_1 mostrada en la fig. 321. También se ha construido una parábola obtenida al intersecar un paraboloide hiperbólico con un plano de perfil que pasa por los puntos B y D (en la fig. 321, la parábola BOB_1). Para construir la hipérbola según la cual el plano H corta

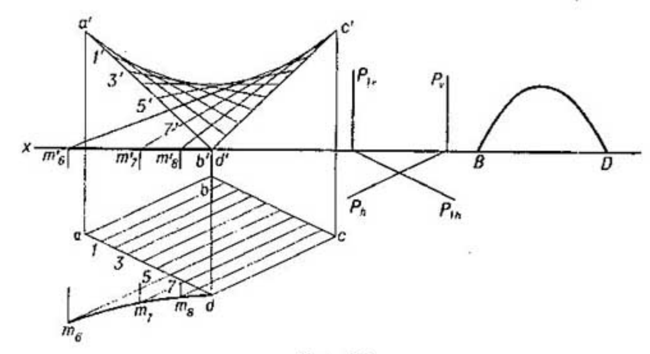


Fig. 322

al paraboloide hiperbólico (fig. 322), hay que hallar las trazas horizontales de las generatrices, como se muestra en la fig. 322 para algunas de ellas.

Así pues, *para las superficies examinadas* (*cilindroide, conoide y paraboloide hiperbólico*) *la generatriz es una recta que debe cortar al mismo tiempo a dos directrices y permanecer constantemente paralela a cierto plano, con la particularidad de que las posiciones de estas directrices y del plano de paralelismo deben permanecer invariables.*

2. Superficies con tres directrices. 2.1. *Hiperboloide de una hoja.* Se llama hiperboloide de una hoja a la superficie engendrada por el movimiento de una recta que corta simultáneamente a tres rectas que se cruzan (*directrices*) [1].

---

[1] Si todas las directrices son paralelas a un plano, entonces la generatriz, al moverse por estas directrices, engendra un *paraboloide hiperbólico.*

Si (fig. 323) en una de las tres rectas que se cruzan dadas (en la recta I) se toma un punto A_1 y se traza por este punto y cada una de las dos rectas restantes (la II y la III) los planos Q y P, entonces estos planos se cortarán según una recta que pasará por el punto A_1 y que cortará a la recta II en el punto K_2 y a la recta III en el punto K_3. Si en calidad de puntos de partida se toman todos los puntos de la recta I y para cada uno de éstos se construyen por el procedimiento indicado tales rectas como A_1K_2, ..., éstas generarán una superficie llamada *hiperboloide de una hoja*.

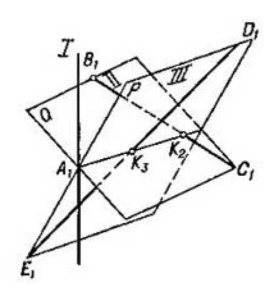
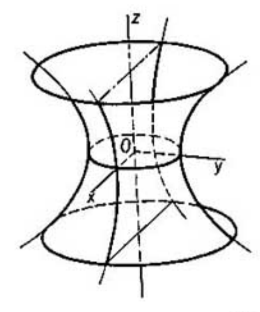
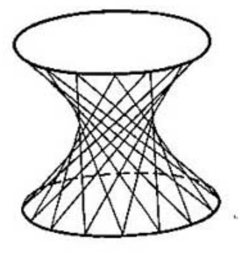


Fig. 323

En la práctica se toma una serie de puntos de la recta I y se construyen las generatrices correspondientes. En la fig. 323 hubiera bastado con la construcción de un solo plano, por ejemplo, el plano Q de la recta II y hallar el punto de intersección K_3 de la recta III con el plano Q.

En la Geometría Analítica se demuestra que el hiperboloide de una hoja puede ser también obtenido como resultado del movimiento de una elipse que se deforma (fig. 324, a la izquierda) cuyo plano permanece paralelo al plano xOy y los extremos de cuyos ejes se deslizan por hipérbolas situadas en los planos xOz y yOz. En la fig. 324, a la derecha, se muestra un hiperboloide de una hoja con las generatrices rectilíneas trazadas en él. Si se sustituye la elipse por una *circunferencia deformada*, ambas hipérbolas directrices serán iguales. En este caso, la superficie se llama *hiperboloide de revolución de una hoja* (véase más adelante el § 51).




Fig. 324

Por cualquier punto de un hiperboloide de una hoja se pueden trazar dos rectas pertenecientes a esta superficie. Antes esto fue señalado para el paraboloide hiperbólico.

En la fig. 325 está representado un hiperboloide de una hoja dado por tres rectas que se cruzan de posición arbitraria. Una de estas rectas está situada perpendicularmente al plano H. Tal posición siempre se puede obtener, por ejemplo, por el método de cambio de los planos de proyección. En dicha figura se muestra la construcción de la proyección frontal k' del punto K perteneciente al hiperboloide de una hoja y dado por su proyección horizontal k. Trazando por los puntos a y k una recta (la proyección horizontal de la generatriz), con auxilio de los puntos d y f construimos las proyecciones d' y f', lo que determina la proyección frontal de esta generatriz, y en ella el punto buscado k'.

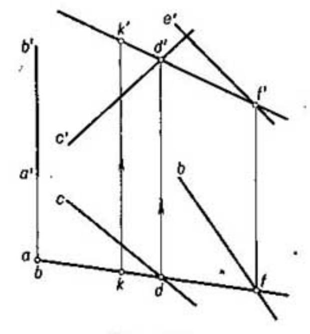


Fig. 325

Si en vez de la proyección horizontal se da la proyección frontal del punto K perteneciente a un hiperboloide de una hoja y, además, ninguna de las directrices es perpendicular al plano V, entonces se debe intersecar el hiperboloide de una hoja con un plano que pase por el punto K, como ya se dijo más arriba.

2.2. *Cilindro oblicuo con tres directrices.* Se llama cilindro oblicuo con tres directrices la superficie generada por el movimiento de la recta generatriz por tres directrices, de las cuales por lo menos una es curva [1].

Si las generatrices son rectas que se cruzan, se obtiene el hiperboloide de una hoja examinado más arriba (pág. 205). Es posible el caso cuando una de las directrices sea una curva plana. Esta no debe estar situada en un mismo plano con ninguna de las rectas que se cruzan, que son las otras dos directrices. Si dos de las directrices son curvas y la tercera recta, entonces tal cilindro oblicuo se llama *conosoide*. Un ejemplo se da en la fig. 326. El conosoide viene dado por dos curvas situadas en los planos de perfil y la recta AB perpendicular al plano H. Las proyecciones horizontales de las generatrices pasan por el punto a (b). Las proyecciones frontales de las generatrices cortan a la proyección $a'b'$ en distintos puntos. En la fig. 326 se muestra la construcción de las proyecciones frontal y de perfil del punto K perteneciente al conosoide y dado por su proyección k: por los puntos a y k se ha trazado la proyección de la generatriz, se han construido las demás proyecciones de esta generatriz, y sobre ellas,

[1] Sobre la construcción de las generatrices de un cilindro oblicuo con tres directrices véase el § 63.

las proyecciones k' y k''. Si viene dada, por ejemplo, la proyección k' y hay que hallar la proyección k, entonces se utiliza la correspondiente sección de la superficie, como se dijo sobre esto en la pág. 201.

Los cilindros oblicuos con tres directrices tienen amplia aplicación en la práctica (al diseñar hélices, superficies de la carrocería de los automóviles y otras).

Así pues, *para las superficies examinadas (hiperboloide de una hoja y cilindro oblicuo con tres directrices) la generatriz es una recta que debe intersecar simultáneamente tres directrices fijas.*

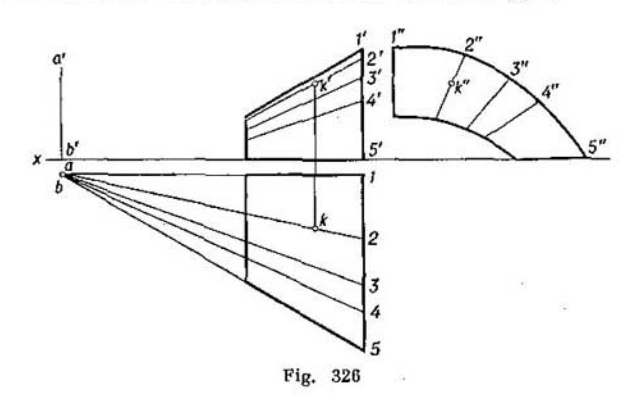


Fig. 326

C. Superficies curvas no regladas

1. De segundo orden. Más arriba se examinaron las superficies *regladas* de segundo orden: cilindro, cono, paraboloide hiperbólico y el hiperboloide de una hoja. Ahora examinemos las démas superficies de segundo orden, las *curvas*: elipsoide, paraboloide elíptico y el hiperboloide de dos hojas.

1.1. *Elipsoide.* El elipsoide puede ser obtenido como resultado del movimiento de una elipse deformable $ACBD$ (fig. 327) cuyo plano queda paralelo al plano xOy y los extremos de cuyos ejes se deslizan por las elipses $AEBF$ y $CEDF$. Si en este elipsoide los tres diámetros AB, CD y EF no son iguales entre sí, entonces el elipsoide se llama *triaxial*; si dos de ellos son iguales entre sí, pero no son iguales al tercero, entonces se obtiene un elipsoide de revolución *achatado* o *estirado* (véase el § 51); si $AB=CD=EF$, se obtiene una *esfera*. Al intersecar el elipsoide con cualquier plano se obtiene una elipse; en casos particulares, una circunferencia.

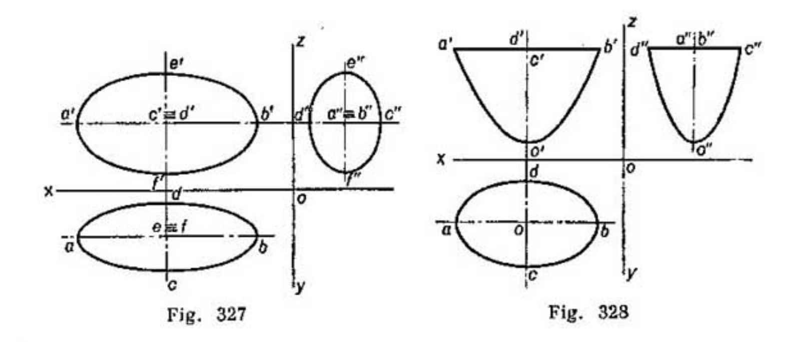


Fig. 327 Fig. 328

1.2. *Paraboloide elíptico.* El paraboloide elíptico puede ser obtenido como resultado del movimiento de la elipse deformable $ABCD$ (fig. 328) cuyo plano queda paralelo al plano xOy y los extremos de cuyos ejes se deslizan por las parábolas AOB y COD. Al cortar un paraboloide elíptico con diferentes planos pueden obtenerse solamente elipses (en algunos casos, circunferencias) y parábolas, con la particularidad de que las últimas se obtienen en el caso de planos secantes paralelos al eje del paraboloide elíptico. Si se sustituye la elipse $ABCD$ por una circunferencia deformable, entonces, ambas parábolas AOB y DOC serán iguales. En este caso la superficie se llama *paraboloide circular* o *paraboloide de revolución* (véase el § 51).

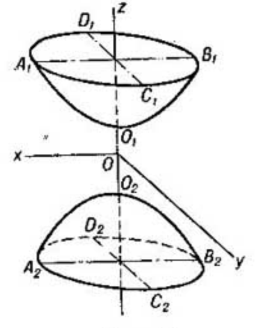


Fig. 329

1.3. *Hiperboloide de dos hojas.* El hiperboloide de dos hojas (fig. 329) consta de dos partes (hojas) que se extienden al infinito. Cada una de estas hojas puede ser obtenida como resultado del movimiento de una elipse deformable ($A_1C_1B_1D_1$ y $A_2C_2B_2D_2$) cuyo plano queda perpendicular al eje de la superficie O_1O_2 y los extremos de cuyos ejes se deslizan por dos hipérbolas. Si sustituimos la elipse por una circunferencia deformable, ambas hipérbolas $A_1O_1B_1$ y $C_1O_1D_1$ serán iguales. En este caso la superficie se llama *hiperboloide de revolución de dos hojas* (véase el § 51).

En las secciones producidas en el hiperboloide de dos hojas por diferentes planos, pueden obtenerse elipses (en casos particulares, circunferencias), hipérbolas y parábolas.

2. Cíclicas. La superficie *cíclica* se genera por una circunferencia de radio variable cuyo centro se desplaza por una curva cualquiera. Destaquemos el caso de generación de una superficie cíclica, cuando el plano de la circunferencia generatriz queda perpendicular a la curva directriz dada por la que se mueve el centro de la circunferencia. Tal superficie se suele llamar *estriada*. Podemos darnos una idea de la superficie estriada considerándola también como una envolvente de la familia de las esferas de diámetro variable cuyos centros se encuentran en cierta curva directriz. El radio de la circunferencia generatriz o de la esfera generatriz puede ser constante. La superficie generada por el movimiento de tal circunferencia por cierta curva directriz o al envolver todas las posiciones consecutivas de la esfera generatriz cuyo centro realiza semejante movimiento, se llama *tubular*. Como ejemplo de su aplicación en la técnica pueden servir los compensadores en las tuberías[1]).

La curva directriz para una superficie tubular puede ser una línea helicoidal cilíndrica; en este caso tendremos una *superficie helicoidal tubular*. Véase un ejemplo en la fig. 349: la superficie del alambre de sección circular enrrollado en el tubo. Es también una superficie helicoidal tubular la superficie de un muelle cilíndrico con sección circular de sus espiras.

Las superficies cíclicas de diferentes tipos se aplican, por ejemplo, en las tuberías de gas, en las turbinas hidráulicas y en las bombas centrífugas. Si en vez de una directriz curva tomamos una recta, la superficie estriada se transforma en una superficie de revolución (véase el § 51), en particular, en cónica, y la superficie tubular, siendo la directriz recta, se transforma en una superficie del cilindro de revolución.

D. Superficies dadas por su estructura

Se llama *superficie dada por su estructura* a la superficie dada por *cierta cantidad de líneas* pertenecientes a esta superficie. En particular, podemos imaginarnos un grupo de ciertas curvas planas, cada una de las cuales está dispuesta en planos paralelos entre sí, y otro grupo de líneas que cortan a las del primer grupo; en la intersección se genera la estructura de la superficie.

La superficie dada por su estructura no se puede considerar como completamente determinada: pueden haber superficies con una misma estructura, pero que se distinguen algo una de la otra.

---

[1]) Dispositivos para absorber las variaciones de longitud de la tubería en el caso de oscilación considerable de la temperatura.

Como ejemplo de superficies estructurales pueden servir las superficies de los cascos de los barcos, de los aviones y de los automóviles.

E. Superficies gráficas

Toda superficie puede ser dada gráficamente[1]. Pero, para unas superficies las generatrices y las directrices están geométricamente determinadas y la generación de la superficie está sometida a cierta ley, para otras estas condiciones no existen. En el último caso las superficies se dan solamente con ayuda del dibujo lineal valiéndose de cierta cantidad de líneas que deberán pertenecer (según la idea durante el diseño) a tal superficie o que se revelan en la superficie existente.

A tales superficies se les suele llamar *superficies gráficas.*

A esta clase de superficies pertenece también la superficie llamada *topográfica*, es decir, la superficie terrestre desde el punto de vista de su representación. El relieve de la superficie terrestre se reproduce con líneas (horizontales) obtenidas al intersecar a esta superficie con planos horizontales.

PREGUNTAS A LOS §§ 49 Y 50

1. ¿Qué significa superficie?
2. ¿Cómo se genera la superficie llamada cinemática?
3. ¿Qué significa línea generatriz de una superficie?
4. ¿En qué consiste la diferencia entre las superficies reglada y no reglada?
5. ¿Puede tener la superficie engendrada en calidad de generatriz no una línea, sino una superficie?
6. ¿A qué se le llama línea directriz?
7. ¿Cuáles superficies se refieren a las alabeadas (no desarrollables)?
8. ¿Qué significa «representar una superficie en el dibujo»?
9. ¿Cómo se generan las superficies cilíndrica, cónica, con arista de retroceso y cómo se representan en el dibujo?
10. ¿Qué significa superficie de segundo orden y qué líneas se producen en la intersección de esta superficie con planos?
11. ¿Cómo se distinguen las superficies cilíndricas?
12. ¿A cuál cono se le llama elíptico y a cuál, oblicuo circular?
13. ¿Por qué se expresa la superficie con arista de retroceso en el dibujo? ¿Cómo, además de «superficie con arista de retroceso» se le suele llamar a esta superficie?
14. ¿Cómo se generan las superficies con plano de paralelismo?
15. ¿Cuáles líneas son las directrices en el cilindroide y en el conoide?
16. ¿Cómo se genera la superficie oblicua (el paraboloide hiperbólico)?
17. ¿Según cuáles líneas se corta el paraboloide hiperbólico por planos paralelos a los planos de coordenadas?
18. ¿Cuántas rectas pertenecientes al paraboloide hiperbólico se pueden trazar por cada uno de sus puntos?
19. ¿Cómo se genera el hiperboloide de una hoja?
20. ¿Cuántas rectas pertenecientes al hiperboloide de una hoja se pueden trazar por cada uno de sus puntos?

---

[1] Es decir, con auxilio del dibujo lineal.

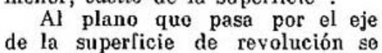
21. ¿Cómo se genera la superficie llamada cilindro oblicuo con tres directrices?
22. ¿En cuál caso el cilindro oblicuo con tres directrices se llama conosoide?
23. Enumeren las superficies regladas y curvas de segundo orden.
24. ¿Puede ser examinada la esfera como un elipsoide y en cuál caso?
25. ¿Cuáles curvas se obtienen al intersecar un elipsoide con planos?
26. ¿A qué se le llama paraboloide elíptico?
27. ¿Cuáles curvas se obtienen al intersecar un paraboloide elíptico con planos?
28. ¿Cuáles curvas se obtienen en la intersección de un hiperboloide de dos hojas con planos?
29. ¿Cuáles superficies se llaman cíclicas?

§ 51. SUPERFICIES DE REVOLUCION

En el grupo de superficies curvas (regladas y no regladas) se incluyen las superficies, ampliamente difundidas en la práctica, llamadas de revolución. Se llama *superficie de revolución* a la superficie engendrada por el movimiento de cualquier línea generatriz que gira alrededor de una recta fija llamada *eje de la superficie*[1].

La superficie de revolución puede ser dada por la generatriz y la posición del eje. En la fig. 330 se muestra dicha superficie. Aquí como generatriz sirve la curva ABC y como eje la recta OO_1 dispuesta en un mismo plano con la curva ABC. Cada punto de la generatriz describe una circunferencia. De este modo, el plano perpendicular al eje de la superficie de revolución corta a esta superficie según una circunferencia. Estas circunferencias se llaman *paralelos*. El mayor de los paralelos se llama *ecuador*, y el menor, *cuello* de la superficie[2].

Fig. 330



Al plano que pasa por el eje de la superficie de revolución se le llama *plano meridional*. La línea de intersección de una superficie de revolución con el plano meridional se llama *meridiano de la superficie*.

[1] Durante la generación de la superficie de revolución el eje permanece fijo.

[2] Más exactamente, se llama ecuador a aquel de los paralelos que es mayor que los paralelos vecinos a éste a ambos lados del mismo, considerados hasta el primer cuello; cuello es el menor de los paralelos vecinos hasta el primer ecuador. De aquí se desprende que la superficie de revolución puede tener unos cuantos ecuadores y cuellos.

Se puede llamar *vértice de la superficie de revolución* al punto de intersección del meridiano de esta superficie con su eje, si en la intersección no se forma un ángulo recto.

Si el eje de la superficie de revolución es paralelo al plano V, el meridiano situado en el plano paralelo al V se llama *meridiano principal*. En tal posición, el meridiano principal se proyecta sobre el plano V en verdadera magnitud. Si el eje de la superficie de revolución es perpendicular al plano H, el contorno de la proyección horizontal de la superficie es una circunferencia.

Lo más conveniente desde el punto de vista de la representación es que el eje de la superficie de revolución sea perpendicular al plano H, al V o al W.

Algunas superficies de revolución representan casos particulares de las superficies examinadas en el § 50. Tales son: 1) el cilindro de revolución, 2) el cono de revolución, 3) el hiperboloide de revolución de una hoja, 4) el elipsoide de revolución, 5) el paraboloide de revolución, 6) el hiperboloide de revolución de dos hojas.

Para el *cilindro* y el *cono de revolución* los meridianos son rectas; en el primer caso, paralelas al eje y equidistantes de éste, en el segundo caso son rectas que cortan al eje en un mismo punto y bajo un mismo ángulo al mismo. Puesto que el cilindro y el cono de revolución son superficies que se extienden infinitamente en dirección de sus generatrices, en las representaciones éstos se delimitan generalmente por algunas líneas, por ejemplo, por las trazas de estas superficies en los planos de proyección o por uno de sus paralelos. El *cilindro circular recto* y el *cono circular recto*, conocidos de la Estereometría, están limitados por una superficie de revolución y planos perpendiculares a sus ejes. Los meridianos de tal cilindro son rectángulos, y los de dicho cono son triángulos.

Para el *hiperboloide de revolución* el meridiano es una hipérbola, con la particularidad de que si el eje de giro es el eje real de la hipérbola, entonces se engendra un hiperboloide de revolución *de dos hojas*, y si se hace girar la hipérbola alrededor de su eje imaginario, se engendra un hiperboloide de revolución *de una hoja*.

El hiperboloide de revolución de una hoja puede ser también engendrado por el giro de una recta *cuando la generatriz y el eje de giro son rectas que se cruzan*. En la fig. 331 se muestra un hiperboloide de revolución de una hoja engendrado por el movimiento de la recta AB que gira alrededor del eje indicado y limitado por dos paralelos; la circunferencia descrita desde el centro O_1 es el cuello de la superficie.

En el hiperboloide de revolución de una hoja se pueden trazar generatrices rectilíneas en dos direcciones, por ejemplo, así como se muestra en la fig. 331, y con inclinación hacia el lado contrario bajo el mismo ángulo al eje.

Además de las rectas en esta superficie pueden haber hipérbolas y circunferencias: las hipérbolas como consecuencia de la intersección con planos que pasan por el eje del hiperboloide, y las circunferencias como resultado de la intersección con planos perpendiculares al eje.

En la fig. 331, a la derecha, se muestra la construcción de la proyección frontal del hiperboloide de revolución de una hoja con ayuda de su eje y su generatriz. Primeramente se ha hallado el radio

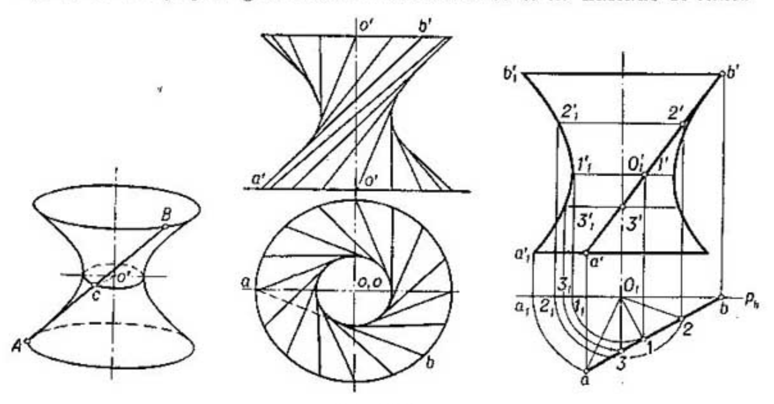


Fig. 331

del cuello de la superficie. Para ello se ha trazado la perpendicular o_1 *1* a la proyección horizontal de la generatriz. Con esto queda determinada la proyección horizontal de la perpendicular común a la generatriz y al eje. La magnitud verdadera del segmento expresado por las proyecciones $o_1'1'$ y o_1 *1* es igual al radio del cuello de la superficie. A continuación al girar los puntos con las proyecciones *2'*, *2*; *3'*, *3*; *a'* y *a* se han llevado al plano *P* paralelo al *V*, lo que da la posibilidad de trazar la línea de contorno de la proyección frontal del hiperboloide. Su proyección horizontal representará tres circunferencias concéntricas.

Para *el paraboloide de revolución el meridiano es una parábola*, cuyo eje es el eje de la superficie.

Para *el elipsoide de revolución el meridiano es una elipse*. La superficie puede ser engendrada girando la elipse alrededor de su eje mayor (*elipsoide de revolución «estirado»*; fig. 332, a la izquierda) o alrededor de su eje menor (*elipsoide de revolución «comprimido»*; fig. 332, a la derecha). El elipsoide de revolución es una superficie delimitada; se puede representar totalmente. También se puede re-

presentar totalmente la esfera. Para la esfera, el ecuador y los meridianos son circunferencias iguales entre sí.

Prestemos atención una vez más a que las superficies de revolución como el cilindro, el cono y el hiperboloide de una hoja son regladas, es decir, pueden ser engendradas por el giro de una recta[1]. Pero el elipsoide, el hiperboloide de dos hojas y el paraboloide se generan por el giro no de una recta, sino de una elipse, una hipérbola y una parábola, eligiendo el eje de giro de tal modo que la curva generatriz se disponga simétricamente respecto de este eje. Lo mismo

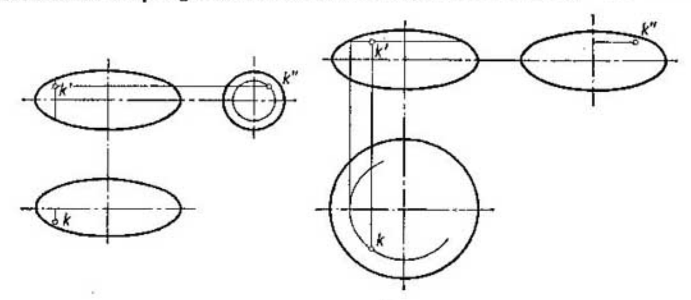


Fig. 332

se puede decir respecto al hiperboloide de revolución de una hoja si se genera como resultado del giro de una hipérbola alrededor de su eje imaginario.

Dado que el eje de giro se elige coincidente con el eje de simetría de la elipse, parábola e hipérbola, la elipse y la hipérbola engendran dos superficies cada una, por el hecho de que ambas curvas tienen dos ejes de simetría, mientras que la parábola genera una sola superficie, por tener un solo eje de simetría. Por consiguiente, cada superficie engendrada se obtiene solamente mediante el giro por un solo procedimiento, mientras que la esfera, que se puede considerar como un elipsoide cuando los ejes mayor y menor de la elipse generatriz son iguales, que se transforma en este caso en una circunferencia, puede ser engendrada por el giro por más de un procedimiento: la circunferencia generatriz es simétrica respecto de cada uno de sus diámetros.

---

[1] La ley de disposición de las generatrices rectilíneas del hiperboloide de revolución de una hoja se emplea en la construcción conocida bajo el nombre de «Torre de Shújov». Shújov (1853—1939) es uno de los eminentes ingenieros rusos. La «Torre de Shújov» se emplea en los mástiles de transmisión, en las torres con tanque de agua, etc.

Al girar la circunferencia (o su arco) alrededor del eje situado en el plano de esta circunferencia, pero que no pasa por su centro, se obtiene una superficie llamada *toro*. Se llama también toro al cuerpo delimitado por la superficie tórica.

Se distinguen (fig. 333): 1) el *toro abierto*, de otra manera *corona circular*, 2) el *toro cerrado*, 3) el *toro que corta a sí mismo*. En la fig. 333

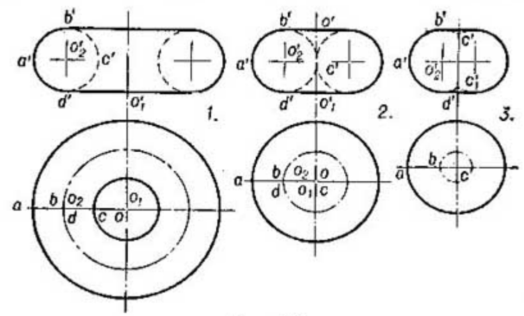


Fig. 333

todos ellos se representan en la posición más simple: el eje del toro es perpendicular al plano de proyección, en el caso dado al plano H.

Como generatriz para el toro abierto y el toro cerrado sirve la circunferencia; para el toro que corta a sí mismo, el arco de circunferencia. En los toros abierto y cerrado se pueden inscribir esferas.

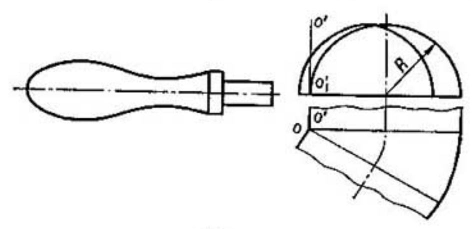


Fig. 334

El toro puede ser considerado como una superficie que envuelve esferas iguales, cuyos centros se encuentran en la circunferencia.

El toro tiene dos sistemas de secciones circulares: en los planos perpendiculares a su eje y en los planos que pasan por el eje del toro.

La superficie llamada toro se encuentra muy frecuentemente en la construcción de maquinaria y en la arquitectura. En la fig. 334, a la izquierda, se repre-

senta una pieza cuya superficie de revolución contiene un toro que corta a sí mismo y un toro abierto y, a la derecha, se muestra esquemáticamente la superficie de paso de una bóveda cilíndrica a otra que tiene la forma de toro cerrado con el eje OO_1.

Entre las superficies de revolución señalemos además el *catenoide*. Esta superficie se genera por una vuelta completa de la *línea de cadena*[1] alrededor del eje horizontal que se encuentra en un mismo plano con dicha línea.

La posición de un punto en la superficie de revolución queda determinada con ayuda de una circunferencia que pasa por este punto sobre la superficie de revolución.

Pero esto no excluye la posibilidad de emplear generatrices rectilíneas en el caso de superficies de revolución regladas, semejantemente a como se muestra en la fig. 314 para los cilindros y conos de forma general.

En la fig. 330 se muestra el empleo de los paralelos para la construcción de las proyecciones de un punto perteneciente a la superficie de revolución dada. Si se conoce la proyeccion m', entonces trazamos la proyección frontal $f'f_1'$ del paralelo y luego con el radio $R=o_1'f'$ describimos una circunferencia (la proyección horizontal del paralelo) y sobre ésta hallamos la proyección m. Si se conociera la proyección m, sería necesario trazar con el radio $R=om$ una circunferencia y con ayuda del punto f hallar f' y trazar $f'f_1'$ que es la proyección frontal del paralelo, sobre la cual deberá encontrarse la proyección m'. En la fig. 332 se muestra la construcción de las proyecciones del punto K perteneciente a un elipsoide de revolución, y en la fig. 335, las del punto M perteneciente a la superficie de una corona circular.

En la fig. 335, a la derecha, se muestra la determinación de las proyecciones de los puntos de una esfera. Con auxilio de la proyección dada a del punto A se ha construido la proyección frontal a'; con ayuda de la proyección dada b' se ha hallado la proyección horizontal b del punto B, que satisface a la condición complementaria de que el punto B está oculto si se mira hacia el plano V.

El punto C viene dado en el ecuador: su proyección c se encuentra en el contorno de la proyección horizontal de la esfera, es decir, en la proyección horizontal del ecuador. Los puntos K y M se encuentran en el meridiano principal ; estos puntos pertenecen a los paralelos sobre los cuales se encuentran los puntos A y B. El punto D también se encuentra en el meridiano principal y está oculto si se mira hacia el plano H.

---

[1] La línea de cadena es la curva cuya forma toma una cadena suspendida en dos de sus puntos, o en general un hilo pesado inelástico suspendido de sus extremos.

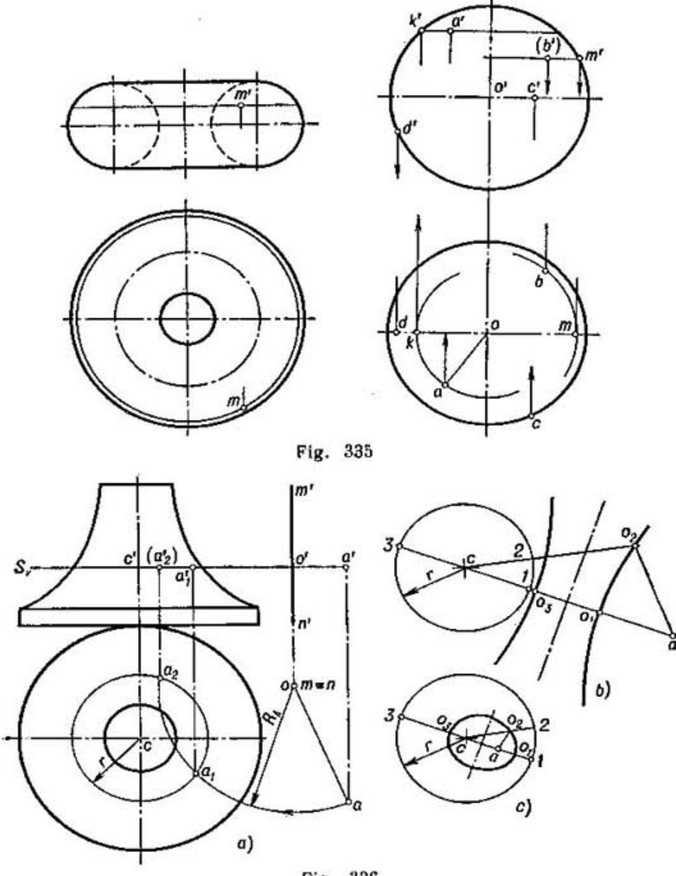


Fig. 335

Fig. 336

Examinemos un ejemplo de la construcción de las proyecciones de los puntos pertenecientes a una superficie de revolución. Supongamos que se exige llevar el punto A, haciéndolo girar alrededor del eje dado MN, a la superficie de revolución dada (fig. 336, *a*). Dado

que en este caso el eje de la superficie de revolución y el eje de giro del punto A son perpendiculares al plano de proyección H, la circunferencia de giro del punto A se proyecta sobre el plano H en verdadera magnitud, así como el paralelo de la superficie de revolución obtenido al intersecarse esta superficie con el plano de giro del punto A. En este plano está situado también el centro de giro del punto A, el punto O (el punto de intersección del eje de giro MN con el plano de giro S). Lo demás está claro del dibujo. En la posición A_2 en la superficie, el punto resulta oculto en el plano V.

Supongamos que se exija elegir el eje de giro de tal modo que el punto dado A pueda ser llevado a la superficie de revolución dada. En la pág. 140 fue examinado un problema semejante, con la diferencia de que allí se exigía elegir el eje de giro de tal manera que se pudiera llevar el punto al plano, haciéndolo girar alrededor de este eje. Entonces fue establecido que existe una zona en la que no se puede elegir el eje, puesto que al girar el punto alrededor de tales ejes dicho punto no puede hacer contacto con el plano. Esta zona quedaba determinada por un cilindro parabólico y la parábola aparecía al examinar la posición recíproca del punto que giraba y la recta en la que debería encontrarse este punto al hacer contacto con el plano.

Ahora, evidentemente, la cuestión se resolverá al examinar la posición recíproca del punto A y la circunferencia (el paralelo) en la superficie del cuerpo de revolución.

De la fig. 336, *a* se deriva que la proyección o del centro de giro deberá estar situada de tal manera que R_A no sea menor que la distancia desde el punto o hasta el punto más cercano en la proyección de la circunferencia de radio r. Si se toma el punto o a iguales distancias de a y de la proyección de esta circunferencia (por ejemplo, en o_1 u o_2, véase la fig. 336, *b*), entonces en este punto se puede colocar el eje de giro: la circunferencia de giro del punto A hará contacto on la circunferencia de radio r, o sea, el punto A hará contacto con la superfie de revolución.

¿Dónde se encuentran en el dibujo todos los puntos alejados a la misma distancia del punto a y de la circunferencia de radio r? Estos se encuentran en la hipérbola (fig. 336, *b*) para la cual el punto a es uno de sus focos, el punto o_1, en el que el segmento $a1$ se divide por la mitad, y que es uno de los vértices. Si se divide el segmento $a3$ por la mitad, obtendremos el segundo vértice de la hipérbola (el punto o_3); el segundo foco se encontrará en el punto c, es decir, en el centro de la circunferencia obtenida en la intersección de la superficie del cuerpo de revolución por el plano S (fig. 336, *a*).

De lo examinado se desprende que los puntos situados en ambas ramas de la hipérbola o entre éstas pueden ser, cada uno de ellos, elegidos en calidad de proyección horizontal del eje de giro.

Puede darse el caso cuando el punto se encuentra dentro de la superficie de revolución. Por consiguiente, trazando por este punto el plano de giro obtendremos la proyección a dentro de la proyección de la circunferencia de radio r según la cual el plano de giro del punto A corta a la superficie de revolución (fig. 336, *c*). También en este caso es evidente que R_A no debe ser menor que la distancia del punto o (o sea, la proyección del eje) al punto más cercano de la proyección de la circunferencia de radio r. Las posiciones extremas de las proyecciones de los ejes se dispondrán ahora como los puntos de una elipse con los focos en los puntos a y c, con el eje mayor en la recta *1—3*, con los vértices en los puntos o_1 y o_3. Dentro de esta elipse no deben tomarse las proyecciones de los ejes: tales ejes no dan la posibilidad de llevar el punto A a la superficie de revolución.

Así pues, la cuestión de cómo elegir el eje de giro para, haciendo girar el punto alrededor de éste, llevar este punto al plano o a la superficie de revolución

cuyo eje es paralelo al eje de giro, nos ha conducido a una elipse (fig. 336, *c*), una parábola (fig. 244) y a una hipérbola (fig. 336, *b*) como lugares geométricos de los centros de giro.

Durante la resolución de distintos problemas, *como lugares geométricos* de los puntos o líneas, que responden a determinadas condiciones, *se emplean unas u otras superficies*. Por ejemplo, vienen dados el plano P y el punto K exterior a este plano; es necesario determinar cómo se dispondrán en el plano P los puntos que se encuentran a la distancia dada r del punto K (la distancia r es mayor que la distancia del punto K al plano P). En este caso la resolución está ligada con el empleo de la esfera como lugar geométrico de los puntos que se encuentran a la distancia r del punto K. El plano P cortará a esta esfera según una circunferencia que será precisamente la que dará la solución del problema[1].

Si se exigiera construir en el plano P los puntos que se encuentran a la distancia r, no del punto, sino de cierta recta AB no perteneciente al plano P, el lugar geométrico de tales puntos en el espacio sería la superficie del cilindro de revolución con el eje AB y radio r, y los puntos buscados en el plano P se obtendrían en la línea de intersección de este cilindro con el plano P.

En adelante, en la fig. 368, a la derecha, y en la 401 se pueden ver ejemplos del empleo de superficies de revolución cónicas como lugares geométricos de rectas que pasan por un punto dado.

Si en el problema se plantea la cuestión de puntos equidistantes del plano Q y del punto M dados, entonces como lugar geométrico de tales puntos en el espacio es conveniente emplear el paraboloid de revolución con el foco de la parábola en el punto M.

El empleo de unas u otras superficies en calidad de lugares geométricos, claro está, no se agota con los ejemplos examinados.

PREGUNTAS AL § 51

1. ¿A qué se le llama superficie de revolución?
2. ¿Con qué se puede expresar la superficie de revolución?
3. ¿A qué se les llama paralelos, meridianos, cuello, ecuador y meridiano principal en una superficie de revolución?
4. ¿Cuál de los ejes de la hipérbola sirve como eje de giro para la generación de: a) un hiperboloide de revolución de una hoja, b) un hiperboloide de revolución de dos hojas?
5. ¿Se puede generar un hiperboloide de revolución de una hoja con ayuda de una recta?
6. ¿Cuáles superficies de revolución (excepto el hiperboloide de una hoja) son regladas?
7. ¿Cómo se genera la superficie llamada toro?
8. ¿En cuál caso al toro se le llama «corona circular»?
9. ¿Cuántos sistemas de secciones circulares tiene el toro?
10. ¿Cómo se determina la posición de un punto en la superficie de revolución?

---

[1] Proponemos al lector cumplir el dibujo y resolver este problema y los que siguen a continuación.

§ 52. SUPERFICIES HELICOIDALES Y TORNILLOS

En la fig. 337 se representa una espira de una *superficie helicoidal* generada por el movimiento del segmento AB. La recta determinada por este segmento corta en todas las posiciones al eje bajo un mismo ángulo (en la fig. 337, un ángulo de 60°). El desplazamiento de los extremos del segmento a lo largo del eje es proporcional al desplazamiento angular del segmento.

Los puntos A y B generan líneas helicoidales cilíndricas, así como todos los puntos del segmento AB y, por consiguiente, para una representación más exacta del contorno de la superficie helicoidal sobre el plano V se debería haber trazado la mayor cantidad posible de proyecciones de las líneas helicoidales descritas por distintos puntos del segmento AB y luego trazar las curvas que envuelven a estas proyecciones. En la práctica, en vez de esta construcción voluminosa se trazan rectas que hacen contacto simultáneamente con las proyecciones de las líneas helicoidales (fig. 345).

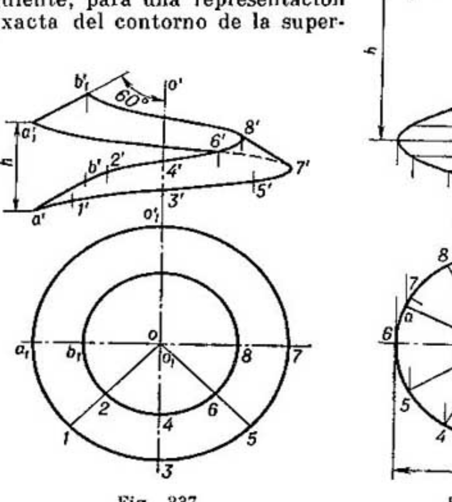


Fig. 337

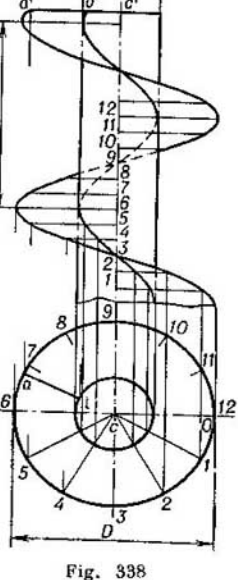


Fig. 338

Si la inclinación de la generatriz respecto al eje del cilindro no es igual a 90° (por ejemplo, 60° en la fig. 337), *la superficie helicoidal se llama oblicua*. Si dicho ángulo es igual a 90°, se engendra una

superficie helicoidal recta. Esta última superficie se muestra en la fig. 338.

Por su generación, la superficie representada en la fig. 338 es un *conoide*. En efecto, la generatriz es una recta paralela en todas sus posiciones a cierto plano (en el caso dado es perpendicular al eje del cilindro); la generatriz corta a dos líneas directrices, una curva y otra recta (el eje del cilindro). Puesto que la curva directriz representa una línea helicoidal, *este conoide se llama helicoidal*. A este conoide se le llama también *helicoide recto*[1].

En la fig. 338 el conoide helicoidal se muestra junto con un cilindro circular que tiene el eje común con el primero; como resultado, en la superficie del cilindro se genera una línea helicoidal cilíndrica cuyo paso es igual al paso de la línea helicoidal directriz. La superficie comprendida entre ambas líneas helicoidales se llama *conoide helicoidal circular*.

La superficie representada en la fig. 337, llamada superficie helicoidal oblicua, se llama también helicoide oblicuo. Un rasgo característico de tal superficie es que la generatriz rectilínea corta en todas sus posiciones a las directrices, una línea helicoidal cilíndrica y una recta (el eje de la superficie) y, además, la generatriz corta al eje bajo un ángulo constante diferente de 90°. En todas sus posiciones, la generatriz es paralela a las generatrices de cierto *cono de revolución* cuyo eje coincide con el eje de la línea helicoidal (fig. 339, a la izquierda). Si, por ejemplo, es necesario obtener la proyección frontal de la generatriz del helicoide oblicuo que pasa por el punto C, se debe trazar primeramente la proyección horizontal de esta generatriz, es decir, trazar el radio sc, con ayuda del punto c_1 hallar el punto c_1' y la proyección frontal de la generatriz SC_1 del cono, y a continuación trazar $c'd'$ paralelamente a $s'c_1'$.

En la fig. 339, a la derecha, se muestra una superficie helicoidal generada por el movimiento del segmento tangente a la superficie del cilindro. La construcción se reduce de nuevo a la determinación de las proyecciones de las líneas helicoidales engendradas por dos puntos: por el extremo A del segmento y por el punto de contacto B. El segmento puede ser dirigido respecto al eje o bien bajo un ángulo recto (como se ha tomado en la fig. 339), o bien bajo un ángulo agudo.

La superficie representada en la fig. 339, a la derecha, es un cilindroide (véase la pág. 201). Efectivamente, la generatriz permanece en todas sus posiciones paralela a cierto plano y se desliza por dos directrices, dos curvas espaciales; el plano de paralelismo es perpendicular al eje del cilindro; la generatriz hace contacto con la superficie del cilindro (los puntos de contacto generan una línea helicoidal cilíndrica) y al mismo tiempo corta a la línea helicoidal directriz cuyo eje coincide con el eje del cilindro. La superficie representada en la fig. 339, a la derecha, se llama *cilindroide helicoidal*. Si la generatriz de tal superficie, que se cruza con el eje del cilindro, forma con este eje un ángulo diferente de 90°, la superficie no se refiere a la serie de cilindroides; esta superficie lleva el nombre de *helicoide circular oblicuo*.

---

[1] Se le suele llamar también *helicoide*. Bajo el nombre de helicoide se comprende una superficie helicoidal reglada.

Las superficies helicoidales examinadas pertenecen a las superficies no desarrollables. Pero existe una superficie que se considera como desarrollable. Esta es la superficie con arista de retorno que es la línea helicoidal cilíndrica (véase la fig. 317). Esta superficie helicoidal se llama *helicoide desarrollable*.

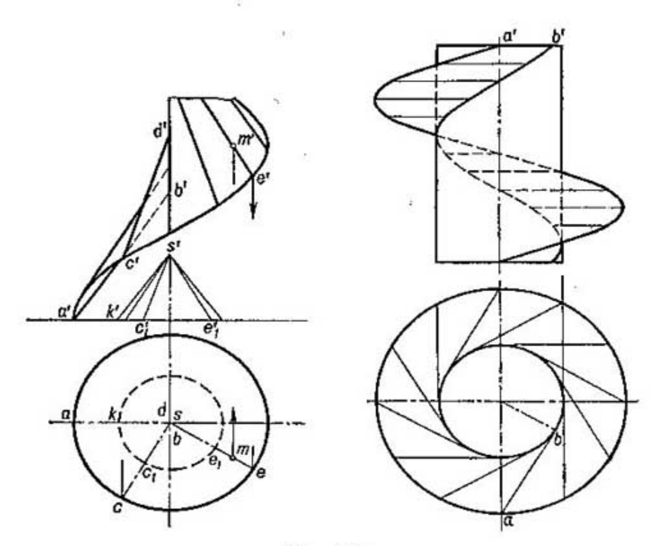


Fig. 339

En la fig. 340 la superficie del helicoide oblicuo se muestra en su intersección con el plano T perpendicular al eje de esta superficie; la curva de intersección se representa en el plano H en tamaño natural, puesto que $T \| H$. Esta curva es una espiral de Arquímedes.

La construcción de esta curva se reduce a lo siguiente. Dividiendo el ángulo $a_0c_0c_6$ (180°) en varias (en el caso dado en seis) partes iguales, dividimos en la misma cantidad de partes iguales entre sí el segmento $c_0\,c_6$. Tomando como radio c_0a_1, a partir del punto c_0 marcamos $c_0c_1=\frac{c_0c_6}{6}$, tomando como radio c_0a_2 marcamos $c_0c_2=$ $=2c_0c_1$, etc.

Ahora, prestemos atención en cómo se construyen las proyecciones de los puntos pertenecientes a las superficies helicoidales recta y oblicua. Para la superficie helicoidal recta esto se muestra en la

fig. 338. Supongamos que el punto A, perteneciente a la superficie, viene dado por su proyección horizontal a. Para hallar la proyección a' es necesario trazar la proyección horizontal de la generatriz en la que debe encontrarse el punto A, es decir, trazar el radio cb por la proyección a. Con ayuda del punto b hallamos el punto b' y trazamos la proyección frontal de esta generatriz, que coincide con la recta $c'b'$. Sobre esta recta hallamos la proyección a' [1].

Si viene dada la proyección a' y hace falta hallar a, entonces, al principio trazamos por a' una recta perpendicular al eje de la línea helicoidal hasta su intersección con la proyección de la línea helicoidal en el punto b', con auxilio de este punto hallamos el punto b y sobre el radio cb, el punto a.

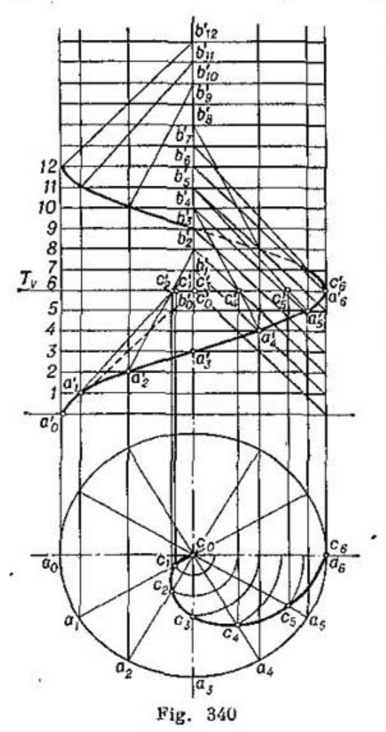


Fig. 340

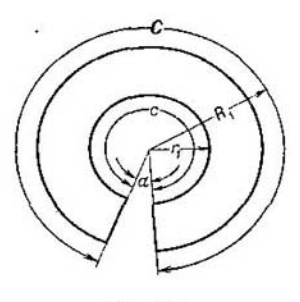


Fig. 341

La precisión de la construcción aquí está relacionada con la precisión del trazado de la sinusoide (la proyección frontal de la línea helicoidal), puesto que el punto b' se encuentra sobre ella.

En el caso de una superficie helicoidal oblicua (fig. 339, a la izquierda), si viene dada la proyección m y es necesario hallar m', trazamos por el punto m el radio se, con ayuda de los puntos e y e_1

[1] Presten atención en la visibilidad del punto A respecto del plano V; en el caso de «opacidad» de la superficie helicoidal el punto A está oculto.

hallamos los puntos e' y e'_1, trazamos la proyección $s'e'_1$ de la generatriz del cono y paralelamente a ésta trazamos a través del punto e' la proyección de la generatriz de la superficie helicoidal. Sobre esta proyección obtenemos la proyección m'.

Si viene dada la proyección m' y hay que hallar m, entonces es necesario construir la curva (la espiral de Arquímedes) de intersección de la superficie helicoidal oblicua con un plano trazado al nivel del punto m' perpendicularmente al eje de la superficie, y sobre la espiral hallar el punto m.

Las superficies helicoidales señaladas en las figs. 337—340 no pueden ser desarrolladas con exactitud sobre un plano. Para la superficie helicoidal recta representada en la fig. 338, se puede *aproximadamente* desarrollar cada vuelta por separado así como se muestra en la fig. 341. El desarrollo de una vuelta se puede representar (aproximadamente) como parte de un anillo plano.

Para construir esta parte de anillo es necesario hallar la magnitud de los radios R_1 y r_1 y del ángulo α. Si se designa el paso de la superficie helicoidal (fig. 338) por h y los diámetros exterior e interior (diámetro del cilindro) por D y d, entonces, por la fórmula dada en la pág. 188, las longitudes de las secciones de las líneas helicoidales se expresarán así:

$$C=\sqrt{\pi^2D^2+h^2} \quad \text{y} \quad c=\sqrt{\pi^2d^2+h^2}.$$

Puesto que las líneas helicoidales se desarrollan en el caso dado en arcos concéntricos con un mismo ángulo central, $c:C=r_1:R_1$ y, por consiguiente,

$$r_1=\frac{c}{C}R_1.$$

Designando la anchura de la superficie helicoidal, o sea, la diferencia $R_1-r_1=\frac{D-d}{2}$, por a, obtenemos $R_1=r_1+a$, de donde $r_1=\frac{C}{c}r_1+\frac{ac}{C}$, o bien $r_1=\frac{ac}{C-c}$. De aquí se desprende que el ángulo α puede ser determinado con ayuda de la fórmula

$$\alpha=\frac{2\pi R_1-C}{2\pi R_1}\cdot 360°.$$

Hagamos $D=100$ mm, $d=60$ *mm*, $h=50$ mm. Hallamos: $a=20$ mm, $C\approx 318$ mm, $c\approx 195$ mm, $r_1\approx 32$ mm, $R_1\approx 52$ mm, $\alpha\approx 10°$.

Describimos con los radios $R_1=52$ mm y $r_1=32$ mm dos circunferencias concéntricas, construimos el ángulo central $\alpha=10°$ y de este modo separamos parte del anillo que representa (aproximadamente) el desarrollo de una vuelta de la superficie helicoidal.

Disponiendo de varias de estas vueltas desarrolladas se puede unir cada vuelta con una barra cilíndrica de diámetro d (como se muestra en la fig. 343) y fijar entre sí una tras otra las vueltas enrolladas sobre la barra.

De modo semejante a como durante el movimiento helicoidal de un punto se engendra una línea helicoidal y durante el movimiento helicoidal del segmento de una recta se engendra una superficie helicoidal, se puede obtener un cuerpo helicoidal si se hace mover a cualquier figura plana (por ejemplo, un cuadrado,

un triángulo, un trapecio) por la superficie de un cilindro de tal modo que los vértices de esta figura se desplacen por las líneas helicoidales y el plano de la propia figura pase constantemente por el eje del cilindro. Se forma un resalte helicoidal delimitado por superficies helicoidales y cilíndricas. La construcción de las proyecciones de este resalte helicoidal se reduce a la construcción de tantas líneas helicoidales cuantos vértices tiene la figura elegida.

En la fig. 342 a la izquierda se muestra la construcción del resalte helicoidal generado por el movimiento de un cuadrado. Uno de los lados del cuadrado linda constantemente con la generatriz del cilindro; los vértices del cuadrado se desplazan por las líneas helicoidales.

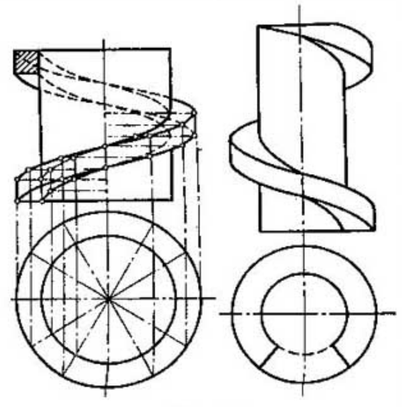


Fig. 342

Durante el fileteado el resalte helicoidal (espira) se obtiene quitando con ayuda de una herramienta cortante parte del material.

El resalte helicoidal obtenido está delimitado por dos superficies helicoidales rectas y dos superficies cilíndricas, exterior e interior, que hace contacto con la superficie del propio cilindro. *Al conjunto del cilindro y el resalte helicoidal en éste se le llama tornillo.* En el caso representado en la fig. 342, a la izquierda, viene dado un *tornillo a derechas*: la pendiente del resalte helicoidal en la parte delantera (visible) del cilindro va de izquierda a derecha. Si la pendiente del resalte helicoidal en la parte delantera (visible) del cilindro fuera de *derecha a izquierda (fig. 342, a la* derecha), tendríamos un tornillo a izquierdas (véase la pág. 187, líneas helicoidales dextrorsa y sinistrorsa).

En la figura 343 se muestra un resalte helicoidal generado por el movimiento de un rectángulo cuyo lado menor linda con la generatriz del cilindro. Los tornillos de este tipo se emplean en los transportadores de tornillo[1].

En la misma fig. se muestra la construcción de la proyección a' del punto A que se encuentra en la superficie helicoidal y que viene dado por su proyección a. La construcción es similar a la mostrada en la fig. 338, pero se muestra cómo evitar el error en el trazado de la sinusoide. Para ello se puede hallar el segmento l que determina el desplazamiento del punto 1 a lo largo del eje del tornillo al girar la generatriz de la posición inicial a la posición $C1$ (es decir, el ángulo $oc1$). Se debe tomar la proporción $x : h = \angle oc1 : 360°$ y de aquí determinar x, lo que nos dará precisamente la magnitud l. Lo sucesivo está claro del dibujo.

Los tornillos representados en la fig. 342 tienen *rosca cuadrada*. Si en vez de un cuadrado tomamos un triángulo y le hacemos desplazarse a lo largo del cilindro así como se hizo con el cuadrado, obtendremos un *tornillo con rosca triangular* (fig. 344). El triángulo generador linda con uno de sus lados con el cilindro principal; los vértices del triángulo generan líneas helicoidales, para la construcción de las cuales se han tomado dos circunferencias. Estas circunferencias se han dividido en 12 partes; los puntos de división se han proyectado sobre líneas horizontales trazadas a través de las 12 divisiones del paso del tornillo. La su-

[1] El transportador de tornillo (transportador helicoidal), de otra manera, transportador de tornillo sin fin, se usa para el desplazamiento de cereales, materiales en pedazos pequeños, etc.

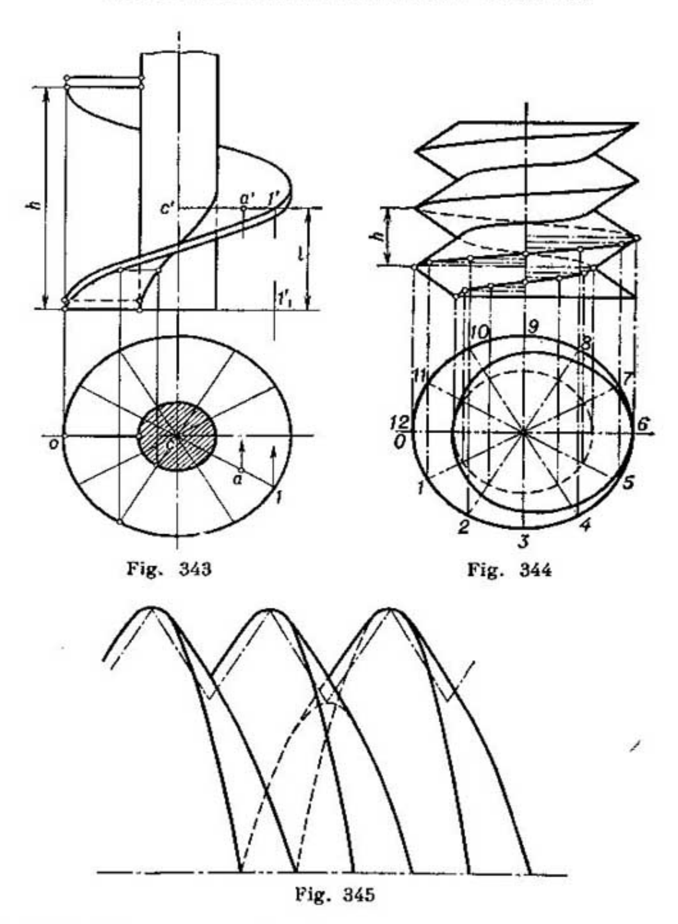


Fig. 343

Fig. 344

Fig. 345

perficie del tornillo con rosca triangular representa una combinación de dos superficies helicoidales oblicuas. El contorno visible sobre el plano V se ha obtenido trazando tangentes a las líneas helicoidales mayor y menor (fig. 345). Así se procede corrientemente, aunque en realidad el contorno de la proyección de la superficie helicoidal oblicua sobre el plano V representa una línea curva.

En la fig. 346 se muestra la construcción de la sección transversal de un tornillo con rosca triangular por el plano R. Se ha trazado el plano proyectante horizontal auxiliar P que pasa por el eje del tornillo. En la intersección con el

resalte helicoidal el plano P produce el triángulo generador [1], cuya proyección horizontal se sitúa sobre la traza horizontal del plano P; la proyección frontal del lado AB de este triángulo se corta con la traza R_v en el punto k' que representa la proyección frontal de uno de los puntos pertenecientes a la línea de intersección de la superficie helicoidal por el plano R. Sobre el segmento ab se obtiene la proyección horizontal del punto K, perteneciente a la proyección horizontal de la línea de intersección buscada de la superficie helicoidal por el plano R.

A continuación, se ha construido un punto más M (m', m) de esta sección; esta vez no se ha trazado el plano proyectante horizontal, con el fin de mostrar que es suficiente marcar solamente la posición de la proyección horizontal del triángulo generador, trazando uno de los radios. Así mismo, en vez de la proyección frontal completa del triángulo generador basta limitarse a la proyección de uno de sus lados, como se muestra en la fig. 346.

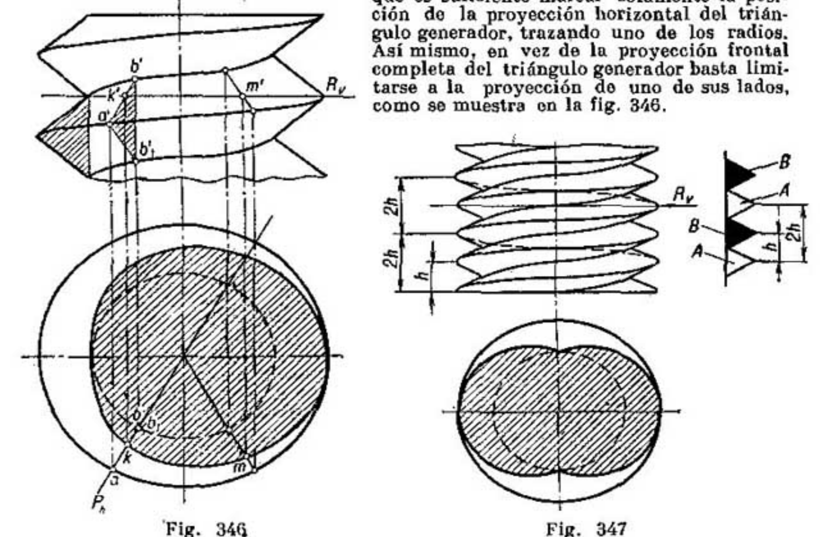


Fig. 346 Fig. 347

Trazando una serie de radios y construyendo las posiciones del triángulo generador correspondientes a estos radios, obtendremos una serie de puntos para trazar la proyección horizontal del contorno de la sección. Como se ve, la figura de la sección está delimitada por una línea curva que tiene eje de simetría; por consiguiente, durante la construcción basta hallar una de las mitades de la línea curva, y la otra mitad se puede construir como una rama simétrica. Cada una de las mitades de esta línea curva representa una espiral de Arquímedes, sobre cuya construcción se habló en la pág. 223.

En el tornillo representado en la fig. 344, el triángulo generador, después de cada vuelta alrededor del eje del cilindro principal, se eleva a la posición vecina a la magnitud del paso de la línea helicoidal. Este tornillo se genera por el movimiento de un perfil, y se llama *de rosca simple* [2].

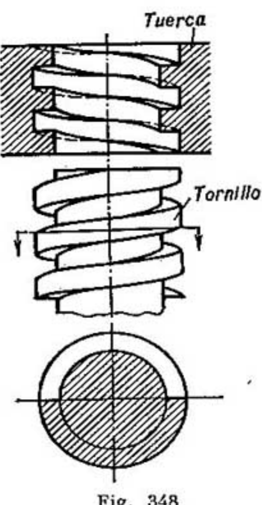
---

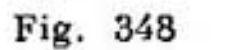
[1] El plano P produce el triángulo generador en dos de sus posiciones: en los lados delantero (visible) y posterior (oculto) del tornillo. En la fig. 346 se muestra la construcción para la parte delantera (visible) del tornillo.

[2] A los tornillos de rosca simple se les llama a veces *de un filete, de filete sencillo* y *de rosca de entrada simple*.

Si se toman dos perfiles y, considerándolos unidos entre sí, se les hace moverse por las líneas helicoidales de tal manera que cada perfil después de una vuelta se eleve a la altura de $2h$ (fig. 347), se obtendrá un tornillo *de doble rosca*[1].

En la fig. 348 están representados un tornillo de rosca cuadrada dextrorsa y una tuerca para éste. En el corte horizontal se ven los segmentos de rectas que junto con las semicircunferencias delimitan la figura de la sección. Estos segmentos corresponden a que el resalte helicoidal está delimitado no por una superficie helicoidal oblicua, sino por una superficie helicoidal recta.




Fig. 348

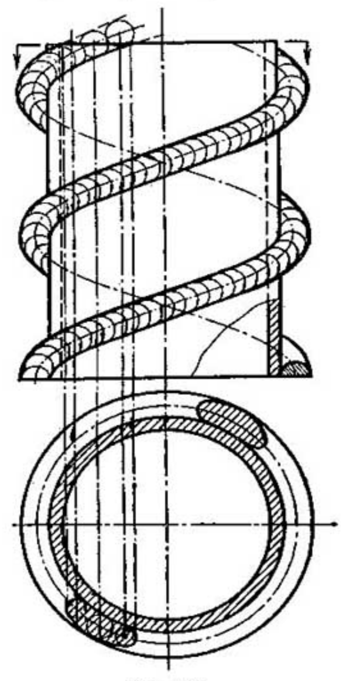


Fig. 349

En la fig. 349 se muestra el tornillo de doble rosca de un transportador de dos tornillos [2], generado por el enrollado de un cable de acero de sección circular sobre un tubo de acero; corrientemente, el cable se fija al tubo por soldadura.

Representándose una serie de esferas, el diámetro de las cuales es igual al diámetro del alambre y cuyos centros están situados en la línea helicoidal (en el eje de la espira), trazamos el contorno de la proyección de la espira como una línea que envuelve a la circunferencia (las proyecciones de las esferas).

---

1) Se les suele llamar: *de doble filete* y *de rosca de dos entradas*.

2) El transportador de dos tornillos sirve para el desplazamiento de cargas por piezas, por ejemplo, sacos, fardos, etc.

En la proyección horizontal se muestran las secciones de dos espiras (el contorno de la proyección de la sección se ha construido como una línea que envuelve a las circunferencias, obtenidas al intersecar las esferas indicadas más arriba con un plano).

PREGUNTAS AL § 52

1. ¿Cómo se generan las superficies helicoidales recta y oblicua?
2. ¿Por qué a la superficie helicoidal recta se le llama también conoide helicoidal?
3. ¿Qué representa un conoide helicoidal circular?
4. ¿Cómo se engendra un cilindroide helicoidal?
5. ¿Cuáles líneas se producen en la sección de las superficies helicoidales recta y oblicua por un plano perpendicular al eje de estas superficies?
6. ¿Cómo se puede desarrollar aproximadamente una vuelta de una superficie helicoidal recta?
7. ¿Cuál de las superficies helicoidales se refiere a las superficies desarrollables?
8. ¿A qué se le llama tornillo?
9. ¿Cómo distinguir por su aspecto exterior a los tornillos con rosca dextrorsa y sinistrorsa?
10. ¿A qué se le llama tornillo de rosca múltiple?

§ 53. TRAZADO DE PLANOS TANGENTES A LAS SUPERFICIES CURVAS

Al representar las superficies curvas y al ejecutar las construcciones relacionadas con éstas puede surgir la necesidad de trazar un plano tangente a la superficie.

Tomemos una pequeña parte de la superficie y un punto sobre ésta. Si por este punto trazamos curvas contenidas en esta superficie y rectas tangentes a estas curvas, las rectas tangentes serán coplanares[1]. A este plano se le llama tangente a la superficie en el punto dado.

El punto de la superficie en el que puede haber un plano tangente (y sólo uno) se llama *ordinario*. A los puntos ordinarios se contraponen los puntos *singulares*, por ejemplo: el vértice de una superficie cónica, el vértice de una superficie de revolución, un punto en la arista de retorno.

El plano queda absolutamente determinado por dos rectas que se cortan; por esta razón, para la construcción de un plano, tangente a una superficie curva en cierto punto de ésta, basta trazar por este punto dos curvas pertenecientes a esta superficie y una tangente a cada una de estas curvas, que pase por dicho punto. Estas dos rectas (tangentes) determinan al plano tangente.

La perpendicular al plano tangente en un punto ordinario de la superficie sirve de *normal a la superficie*. De aquí la denominación

[1] Se examina en la Geometría diferencial. En esta disciplina se estudian las imágenes geométricas a base del método de coordenadas por los medios del cálculo diferencial.

de *sección normal de la superficie* (sección por un plano que pasa por la normal).

En la fig. 350 viene dado un plano tangente a un elipsoide de revolución estirado en el punto K de este elipsoide. Por este punto se ha trazado la paralela a la superficie y a esta paralela, la tangente KF: la proyección $k'f'$ coincide con la proyección frontal de la paralela, y la proyección horizontal kf es la tangente a la circunferencia, o sea, la proyección horizontal de la paralela. En calidad de segunda curva, que pasa por el punto K, se ha tomado el meridiano, que en

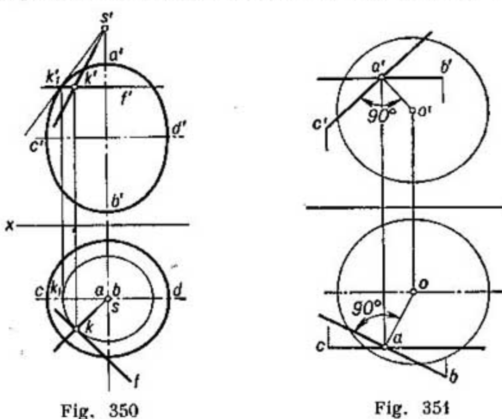


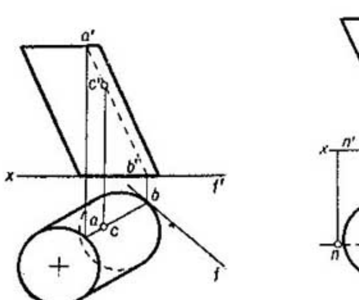
Fig. 350 Fig. 351

la fig. 350 no viene representado: se puede hacer uso del meridiano principal ya trazado, es decir, del contorno de la proyección frontal del elipsoide. Hay que imaginarse que el elipsoide ha sido girado alrededor de su eje AB de tal modo que el meridiano, que pasa por el punto dado K, ha ocupado la posición del meridiano principal AK_1B. En este caso, el punto K ocupará la posición K_1. Trazando en el punto k_1' la tangente a la elipse, obtenemos la proyección frontal de la segunda tangente al elipsoide en el punto K_1. Ahora es necesario hacer girar a esta tangente de tal manera que el punto k_1 ocupe la posición inicial k. El punto S, situado sobre la tangente y sobre el eje del elipsoide, permanece fijo, y la tangente al meridiano en el punto K se expresará por las proyecciones sk y $s'k'$. Las rectas KF y SK determinan al plano buscado.

Evidentemente, tal construcción es aplicable también para la esfera. Pero, en este caso, se puede proceder con más sencillez, partiendo de que *el plano, tangente a la esfera, es perpendicular al radio trazado en el punto de tangencia*. Por eso, trazando el radio OA (fig.

351), construimos el plano, dando su horizontal AB y su frontal AC, perpendicular a OA. Estas rectas determinan el plano tangente a la esfera en el punto A de ésta.

En los ejemplos examinados (figs. 350 y 351) el plano tangente tiene un punto común con la superficie. Si nos imaginamos curvas pertenecientes a la superficie y que pasen por este punto, entonces cerca del punto de tangencia, estas curvas se situarán a un lado del plano tangente. Lo mismo podríamos observar en el paraboloide de revolución, en el toro, generado por un arco (menor que una semicircunferencia) que gira alrededor de sus cuerdas, etc. Tales puntos en la superficie se llaman *elípticos*. Si todos los puntos de una superficie son elípticos, esta superficie es convexa, por ejemplo, el elipsoide representado en la fig. 350.



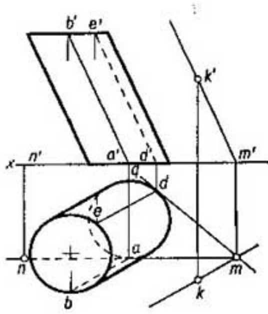


Fig. 352

En la fig. 352 se muestra el trazado de un plano tangente a un cilindro. En la fig. 352, a la izquierda, el plano se ha trazado por el punto dado C de la superficie cilíndrica, y, a la derecha, por el punto K exterior al cilindro.

Aquí el plano hace contacto con la superficie no sólo en un punto, sino en todos los puntos de la generatriz. Tales puntos de la superficie se llaman *parabólicos*. A las superficies con puntos parabólicos se refieren las superficies cilíndricas y cónicas con arista de retorno.

La construcción en la fig. 352, a la izquierda, consiste en lo siguiente. La superficie dada es reglada. Por esta razón, por el punto C se puede trazar la generatriz AB, una de las dos rectas que se cortan y determinan el plano tangente. En calidad de segunda recta se puede tomar la tangente BF a la circunferencia, o sea, a la traza horizontal de la superficie cilíndrica. Las rectas AB y BF determinan el plano tangente buscado. La recta BF es la traza horizontal de este plano.

En la fig. 352, a la derecha, el punto K está dado fuera de la superficie cilíndrica. El plano tangente debe contener a la superficie generatriz; por lo tanto, este plano es paralelo a la dirección de la generatriz. Por eso la recta KM, paralela a la generatriz, pertenece al plano tangente. Como segunda recta que determina, en la intersección con KM, el plano tangente a la superficie cilíndrica, en la fig. 352, a la derecha, se muestra la recta MQ, que es la traza horizontal del plano buscado. Este plano hace contacto con la superficie según la generatriz DE.

Segunda solución: por el punto M se ha trazado la recta MN, la traza horizontal del segundo plano tangente (hace contacto según la generatriz AB).

En la fig. 353 se muestra la construcción de un plano tangente a una superficie cónica en su punto A. La superficie está dada por el vértice S y la directriz, por una elipse situada en el plano H.

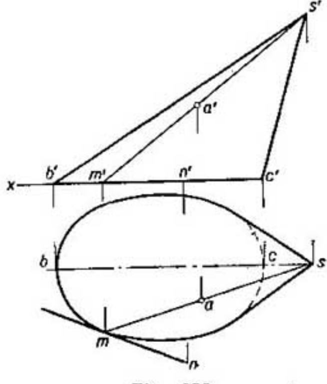


Fig. 353

La generatriz SM, sobre la cual está situado el punto A, es la línea de contacto del plano con la superficie cónica. Además de esta generatriz al plano tangente lo determina también la recta MN en el plano H, tangente a la elipse.

Si el punto, por el cual hay que trazar el plano tangente a la superficie cónica dada, es exterior a esta superficie, entonces, para la construcción del plano tangente es necesario trazar una recta por el vértice S y el punto dado, hallar la traza horizontal de esta recta y trazar por esta traza tangentes a la elipse (semejantemente a cómo se mostró en la fig. 352 a la derecha, donde las tangentes se trazaban a la circunferencia, a la traza de la superficie cilíndrica en el plano H). Se obtienen dos planos tangentes a la superficie cónica.

En los ejemplos dados en las figs. 350—353 los planos tangentes no cortan a las superficies. Pero sí esto es característico para las superficies convexas, en general el plano, tangente a la superficie en cierto punto de ésta, puede cortar a esta superficie. Así, por ejemplo, el plano tangente a la superficie de un paraboloide hiperbólico (véase la fig. 321) en el punto O, contiene las tangentes Ox y Oy a las parábolas BOB_1 y AOA_1 y corta la superficie en dos partes, teniendo con ella una infinidad de puntos comunes.

Al cortar una superficie con un plano tangente a esta superficie en un punto cualquiera de ésta, pueden obtenerse dos rectas que se cortan en este punto, una recta y una curva o dos curvas. Por ejemplo, el hiperboloide de revolución de una hoja, o sea, una superficie reglada con dos rectas generatrices, puede ser cortado según dos líneas rectas que se cortan. Lo mismo observamos en el caso de un paraboloide hiperbólico (fig. 321).

Como ejemplo del corte según una recta y una curva pueden servir los casos de intersección de una superficie reglada no desarrollable, por ejemplo, la intersección de superficies por el plano de paralelismo, de superficies helicoidales con una generatriz rectilínea (excepto el helicoide desarrollable).

Los puntos de la superficie, en los cuales el plano tangente corta la superficie, se llaman *hiperbólicos*. Tales puntos son propios, entre otros, (véase más arriba) de las superficies de revolución cóncavas (véase un ejemplo de tal superficie en la fig. 330).

Si los puntos de una superficie, en una parte cualquiera de ésta, son solamente hiperbólicos, entonces la superficie en esta parte es *en forma de silla* (por ejemplo, en el paraboloide hiperbólico en las figs. 321 y 322).

Si comparamos entre sí las superficies regladas, desarrollables y no desarrollables, entonces, para las desarrollables, los planos tangentes en distintos puntos de la línea generatriz tienen una misma dirección (por ejemplo, en la superficie de revolución cónica), y para las no desarrollables, los planos tangentes en distintos puntos de la generatriz tienen distinta dirección (por ejemplo, en el hiperboloide de revolución de una hoja).

§ 54. EJEMPLOS DE CONSTRUCCION DE LOS CONTORNOS DE LAS PROYECCIONES DE UN CUERPO DE REVOLUCION CON EJE INCLINADO

En la fig. 354 se representa un cono circular recto cuyo eje es paralelo al plano V y está inclinado al plano H. El contorno de su proyección frontal está dado: es el triángulo isósceles $s'd'e'$. Hace falta construir el contorno de la proyección horizontal.

Fig. 354

El contorno buscado está compuesto por parte de una elipse y dos rectas tangentes a ésta. Efectivamente, el cono en la posición dada se proyecta sobre el plano H con auxilio de la superficie de un cilindro elíptico, cuyas generatrices pasan por los puntos de la circunferencia de la base del cono, y con ayuda de dos planos tangentes a la superficie del cono.

La elipse en la proyección horizontal se puede construir por sus dos ejes: el menor de y el mayor, cuya magnitud es igual a $d'e'$ (al diámetro de la circunferencia de la base del cono). Las rectas sb y sf se obtienen, si se trazan desde el punto s tangentes a la elipse. La construcción de estas rectas consiste en hallar las proyecciones de aquellas generatrices del cono según las cuales tiene lugar el contacto del cono con los planos mencionados más arriba. Para esto se ha utilizado una esfera inscrita en el cono. Puesto que el plano que se proyecta sobre el plano de proyección H hace contacto simultáneamente con el cono y con la esfera, se puede trazar una tangente desde el

punto *s* a la circunferencia, a la proyección del ecuador de la esfera, y tomar esta tangente como proyección de la generatriz buscada. La construcción se puede iniciar hallando el punto a', la proyección frontal de uno de los puntos de la generatriz buscada. El punto a' se obtiene en la intersección de las proyecciones frontales 1) de la circunferencia de contacto del cono con la esfera (la recta $m'n'$) y 2) del ecuador de la esfera (la recta $k'l'$). Ahora se puede hallar la proyección *a* sobre la proyección horizontal del ecuador y por los puntos *s* y *a* trazar una recta, la proyección horizontal de la generatriz buscada. Sobre esta recta se determina también el punto *B*, cuya proyección horizontal (el punto *b*) es el punto de tangencia de la recta con la elipse.

Con la construcción de los contornos de las proyecciones del cono de revolución nos encontramos, por ejemplo, en el caso siguiente: se conocen las proyecciones del vértice del cono ($s'\ s_1$), la dirección de su eje (SK), las dimensiones de la altura y del diámetro de la base; construir las pro-

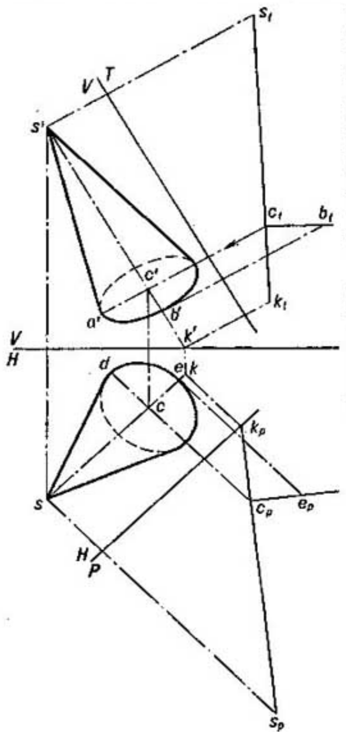


Fig. 355

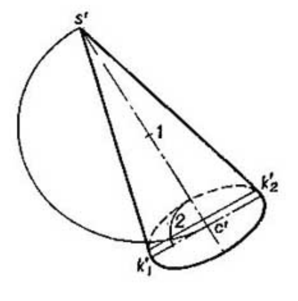


Fig. 356

yecciones del cono. En la fig. 355 esto se ha realizado con ayuda de planos de proyección auxiliares.

Así, para la construcción de la proyección frontal se ha introducido el plano *T* perpendicular a *V* y paralelo a la recta SK que determina la dirección del eje del cono. A la proyección s_1k_1 se ha llevado el segmento s_1c_1 igual a la altura dada del cono. En el punto c_1 se ha levantado la perpendicular a s_1c_1 y a ésta se ha lle-

vado el segmento c_tb_t, igual al radio de la base del cono. Con ayuda de los puntos c_t y b_t se han obtenido los puntos c' y b' y con ello se ha obtenido el semieje menor $c'b'$ de la elipse, la proyección frontal de la base del cono. El segmento $c'a'$, igual a c_tb_t, representa el semieje mayor de esta elipse.

Disponiendo de los ejes de la elipse, ésta puede ser construida así cómo fue mostrado en la fig. 147.

Para construir la proyección horizontal se ha introducido el plano de proyección P, perpendicular a H y paralelo a SK. La marcha de la construcción es análoga a la descrita para la proyección frontal.

¿Cómo construir los contornos de las proyecciones? En la fig. 356 se muestra un procedimiento distinto, al empleado en la fig. 354, de trazado de la tangente a la elipse (sin la esfera inscrita en el cono).

Primeramente, desde el centro de la elipse, con un radio igual al semieje menor de ésta, se ha descrito un arco (en la fig. 356 es una cuarta parte de circunferencia). Se determina el punto *2* de intersección de este arco con la circunferencia de diámetro $s'c'$. Desde el punto *2* se ha trazado una recta paralela al eje mayor de la elipse; esta recta corta a la elipse en los puntos k_1' y k_2'. Ahora queda trazar las rectas $s'k_1'$ y $s'k_2'$; estas rectas son tangentes a la elipse y pertenecen al contorno de las proyecciones del cono.

En la fig. 357 está representado un cuerpo de revolución con eje inclinado, paralelo al plano V. Este cuerpo está delimitado por una superficie mixta, compuesta de dos cilindros, de la superficie de un anillo circular y de dos planos. El contorno de la proyección frontal de este cuerpo es su meridiano principal.

El contorno de la proyección horizontal de la parte cilíndrica superior de este cuerpo se compone de una elipse y dos rectas tangentes a ésta. La recta ab es la proyección horizontal de la generatriz del cilindro, según la cual el plano que se proyecta sobre el plano de proyección H tiene contacto con la superficie del cilindro. Esto se refiere

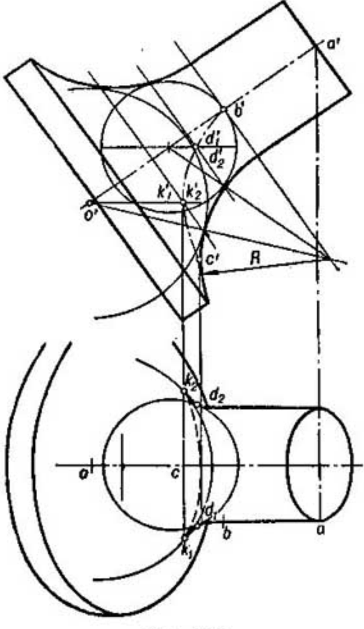
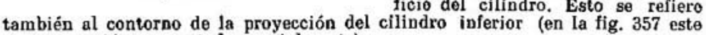


Fig. 357


también al contorno de la proyección del cilindro inferior (en la fig. 357 este contorno está representado parcialmente).

Pasamos a la parte más complicada del contorno, a la intermedia. Debemos construir la proyección horizontal de aquella línea curva espacial, en cuyos puntos pasan las rectas proyectantes, tangentes a la superficie del anillo circular y perpendiculares al plano H. La proyección frontal de cada punto de tal curva se ha construido de la misma manera cómo fue hecho para el punto a' en la fig. 354 (con ayuda de esferas inscritas). Las proyecciones horizontales de los puntos se

determinan sobre la proyección del ecuador de la esfera correspondiente. Así se ha construido, por ejemplo, el punto D_1 (d_1, d_1').

Los puntos k_1 y k_2 se obtienen con auxilio del punto k_1' (este mismo punto es el k_2') sobre el ecuador de la esfera con centro O, mientras que el punto k_1' (k_2') trazando la línea de referencia, tangente a la curva construida $b'd'_1c'$.

Así pues, la curva $b'd_1'k_1'c'$ contiene las proyecciones frontales de los puntos cuyas proyecciones horizontales b, d_1, k_1 pertenecen al contorno de la proyección horizontal del cuerpo examinado.

PREGUNTAS A LOS §§ 53 Y 54

1. ¿A qué se le llama plano tangente a una superficie curva en un punto dado de esta superficie?
2. ¿A qué se le llama punto ordinario de una superficie?
3. ¿Cómo construir el plano tangente a una superficie curva en cierto punto de ésta?
4. ¿A qué se le llama normal a una superficie?
5. ¿Cómo construir el plano tangente a una esfera en cualquier punto perteneciente a esta esfera?
6. ¿En cuál caso una superficie curva se refiere a las superficies convexas?
7. ¿Puede un plano tangente a una superfície curva en cualquier punto de esta superficie, cortar a esta última? Señalen un ejemplo de intersección según dos rectas.
8. ¿Cómo se usan las esferas, inscritas en la superficie de revolución, cuyo eje es paralelo al plano V, para la construcción del contorno de la proyección de esta superficie sobre el plano H, respecto del cual el eje de la superficie está inclinado bajo un ángulo agudo?
9. ¿Cómo trazar la tangente a una elipse desde un punto que se encuentra en la prolongación de su eje menor?
10. ¿En cuál caso los contornos de las proyecciones de un cilindro de revolución y de un cono de revolución serán absolutamente iguales sobre el plano V y el plano H?

IX

CAPITULO

INTERSECCIÓN DE LAS SUPERFICIES CURVAS POR UN PLANO Y UNA RECTA

§ 55. PROCEDIMIENTOS GENERALES DE CONSTRUCCION DE LA LINEA DE INTERSECCION DE UNA SUPERFICIE CURVA POR UN PLANO

Para hallar la línea curva, obtenida en la intersección de una superficie reglada con un plano, en el caso general, es necesario construir los puntos de intersección de las generatrices de la superficie con el plano secante, es decir, hallar el punto de intersección de una recta con un plano. La curva buscada (*la línea de corte*) pasa por estos puntos. En la fig. 358 se da un ejemplo: la superficie cónica, dada por el punto S y la curva ACE, se ha cortado con el plano proyectante frontal T; la proyección horizontal de la línea de intersección se ha trazado por las proyecciones horizontales de los puntos de intersección de una serie de generatrices del plano T.

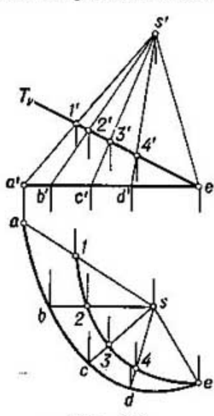


Fig. 358

En este ejemplo, la construcción se simplifica gracias a que el plano secante T es de posición particular. Pero el procedimiento indicado (obtención de los puntos de intersección de una serie de generatrices rectilíneas de la superficie con el plano secante dado para trazar por estos puntos la línea de intersección buscada) es válido para cualquier posición del plano.

Si la superficie curva no es reglada, entonces, para la construcción de la línea de intersección de tal superficie con un plano, en el caso general, se deben emplear planos auxiliares. Los puntos de la línea buscada se determinan en la intersección de las líneas, según las cuales los planos

secantes auxiliares cortan a la superficie y plano dados. Recordemos la fig. 166, en la que se mostró el caso de empleo de planos auxiliares para la construcción de las líneas de intersección de dos planos.

Al elegir los planos auxiliares, como en todos los casos cuando estos se emplean (véase, por ejemplo, la pág. 87), se debe hacer todo lo posible por simplificar las construcciones.

En la fig. 359 viene representado un cuerpo de revolución cortado por un plano dado por el trapecio *ABCD*. Aquí, para la construcción de los puntos de las líneas curvas que se obtienen en la superficie del cuerpo de revolución, se han empleado planos secantes auxiliares. Examinemos como ejemplo uno de ellos, el plano *Q*. Al cortar a la superficie del cuerpo de revolución, este plano produce una circunferencia (paralelo) de radio $o'_q 1'$, y al cortar al plano *ABCD*, la horizontal $A_q D_q$. En la intersección del paralelo de la superficie de revolución con la horizontal $A_q D_q$ se obtienen los puntos X_q e Y_q pertenecientes simultáneamente a la superficie de revolución y al plano *ABCD*, es decir, pertenecientes a la línea de intersección buscada. Repitiendo este procedimiento, obtendremos una serie de puntos que determinan la parte curvilínea de la línea de corte. Las caras planas del cuerpo de revolución dado se han cortado por el plano *ABCD* según rectas expresadas por los segmentos *AD* y *BC*.

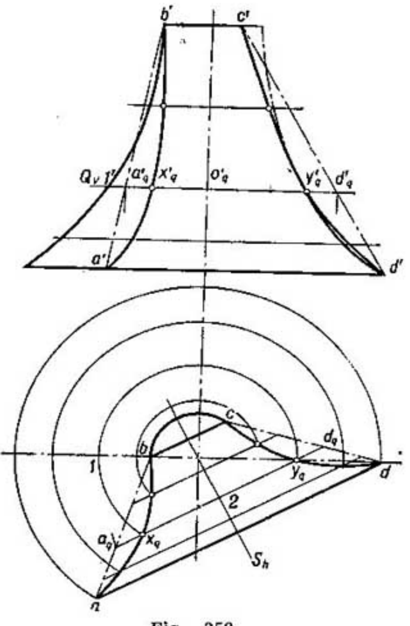


Fig. 359

En el ejemplo examinado, la construcción se simplifica debido a que el eje del cuerpo de revolución es perpendicular al plano *H* y los paralelos se proyectan sobre este plano en forma de circunferencias. El plano de simetría *S* permitía controlar la exactitud de la disposición mutua de los puntos de las curvas $ax_q b$ y $dy_q c$, puesto que, por ejemplo, debe obtenerse $x_q 2 = y_q 2$.

Aplicando el método de cambio de los planos de proyección o de giro, se pueden obtener unas posiciones de la figura cómodas para la construcción, si éstos fueran dados en las posiciones generales en el sistema V, H. Pero todo esto no se refiere al procedimiento expuesto, basado en la introducción de planos auxiliares. Este procedimiento es aplicable independientemente de la posición de la superficie y del plano que se cortan.

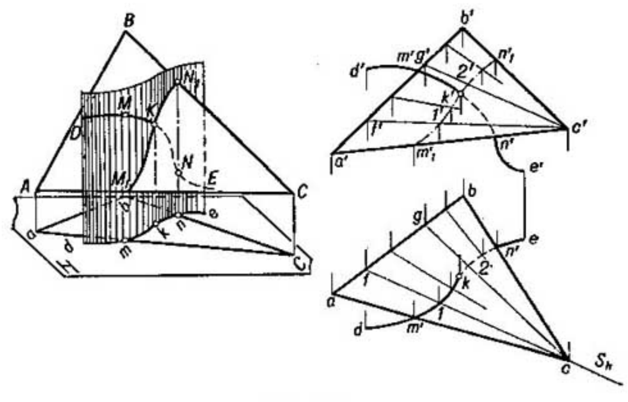


Fig. 360

En toda una serie de casos, la curva, que debe obtenerse en la intersección de una superficie por un plano, es conocida y sus proyecciones pueden ser construidas sobre la base de sus propiedades geométricas. Recordemos, por ejemplo, la espiral de Arquímedes (pág. 223, fig. 340) obtenida al cortar un helicoide oblicuo con un plano perpendicular a su eje. Es obvio que es más conveniente construir esta espiral así como se muestra en la fig. 340, y no buscar puntos para ella mediante su proyección.

§ 56. INTERSECCION DE UNA SUPERFICIE CILÍNDRICA POR UN PLANO. CONSTRUCCION DEL DESARROLLO

Para construir la línea curva obtenida al cortar una superficie cilíndrica con un plano, se debe, en el caso general, hallar los puntos de intersección de las generatrices con el plano secante, como se dijo en la pág. 238 con respecto a las superficies regladas en general. Pero

esto no excluye la posibilidad de emplear planos auxiliares que cortan cada vez a la superficie y al plano. Ante todo señalemos que *toda superficie cilíndrica se corta por un plano, dispuesto paralelamente a la generatriz de esta superficie, según líneas rectas (generatrices)*. En la fig. 360 se muestra la intersección de una superficie cilíndrica por un plano. En este caso, esta superficie es un elemento auxiliar al construir los puntos de intersección de la línea curva con el plano: por la curva dada (véase la fig. 360, a la izquierda) $DMNE$ se ha trazado una superficie cilíndrica, que proyecta a la curva sobre el plano H. A continuación, el plano (en la fig. 360 es un triángulo) corta a la superficie cilíndrica según la curva plana $M_1 \dots N_1$. El punto buscado de intersección de la curva con el plano (el punto K) se obtiene en la intersección de las curvas dada y construida.

Tal esquema de resolución del problema de intersección de una línea curva por un plano coincide con el esquema de resolución de los problemas de intersección de una línea recta con un plano (véanse los §§ 23 y 25); *en ambos casos por dicha línea se traza una superficie auxiliar, que para la línea recta es un plano.*

La proyección horizontal de la curva $M_1 \dots N_1$, que es la línea de intersección de la superficie cilíndrica con el plano, se confunde con la proyección horizontal de la curva $D \dots E$, puesto que esta curva es la directriz de la superficie cilíndrica, siendo las generatrices de esta superficie perpendiculares al plano H. Por esta razón, con ayuda del punto m_1 sobre la proyección ac podemos hallar la proyección m_1' sobre la línea $a'c'$ y con auxilio del punto n_1, la proyección n_1'. Luego en la fig. 360, a la derecha, se muestra el plano auxiliar S que corta a ABC según la recta CF, y a la superficie cilíndrica, según su generatriz con la proyección horizontal en el punto 1. En la intersección de esta generatriz con la recta CF se obtiene el punto con las proyecciones 1 y $1'$, perteneciente a la curva $M_1 \dots N_1$. Evidentemente, se puede no mostrar la traza del plano, sino simplemente trazar una recta en el triángulo, como se muestra respecto de la recta CG, sobre la cual se ha obtenido el punto con las proyecciones 2 y $2'$.

En los ejemplos examinados a continuación se mostrarán los *desarrollos*. El desarrollo de una superficie cilíndrica, en el caso general, se puede realizar por el esquema del desarrollo de la superficie de un prisma. La superficie cilíndrica como si se sustituyera por una superficie prismática inscrita en ésta o circunscrita a la misma, cuyas aristas corresponden a las generatrices de la superficie cilíndrica. El desarrollo, como tal, se efectúa con ayuda de la sección normal, semejantemente al mostrado en la fig. 283. Pero en lugar de la línea quebrada se traza una curva suave.

En la fig. 361 se muestra la intersección de un cilindro circular recto con un plano proyectante frontal. La figura de la sección representa una elipse, cuyo eje menor es igual al diámetro de la base del cilindro; la magnitud del eje mayor depende del ángulo formado por el plano secante con el eje del cilindro.

Dado que el eje del cilindro es perpendicular al plano H, la proyección horizontal de la figura de la sección se confunde con la proyección horizontal del cilindro.

Ordinariamente, para la construcción de los puntos del contorno de la sección se trazan generatrices dispuestas regularmente, o sea, tales, cuyas proyecciones sobre el plano H son puntos equidistantes uno del otro. Es cómodo emplear esta «marcación» no sólo para construir las proyecciones de la sección, sino también el desarrollo de la superficie lateral del cilindro, como se mostrará más abajo.

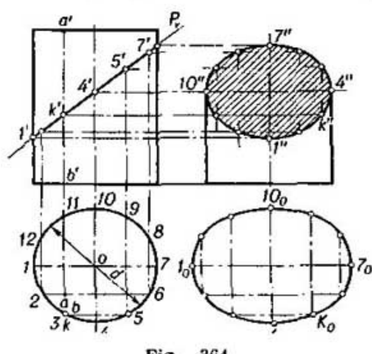


Fig. 361

La proyección de la figura de la sección sobre el plano W es una elipse, cuyo eje mayor es en el caso dado igual al diámetro del cilindro, y el eje menor representa la proyección del segmento $1'7'$. En la fig. 361, la representación sobre el plano W se ha construido de tal manera, como si la parte superior del cilindro hubiera sido separada después de cortar a éste con el plano.

Si en la fig. 361 *el plano P formara con el eje del cilindro un ángulo de* 45°, *entonces la proyección de la elipse sobre el plano W sería una circunferencia.* En este caso, los segmentos $1''7''$ y $4''10''$ serían iguales.

Si cortamos el mismo cilindro con un plano de posición general que forma también con el eje del cilindro un ángulo de 45°, entonces la proyección de la figura de la sección (la elipse), en forma de circunferencia se puede obtener sobre el plano auxiliar de proyección, paralelo al eje del cilindro y a las horizontales del plano secante.

Es evidente, que al aumentar el ángulo de inclinación del plano secante al eje del cilindro, disminuye el segmento $1''7''$; si este ángulo es menor de 45°, el segmento $1''7''$ aumenta, haciéndose el eje mayor de la elipse sobre el plano W, mientras que el eje menor de esta elipse es el segmento $4''10''$.

La forma verdadera de la sección representa, como ya se dijo más arriba, una elipse. Sus ejes se obtienen en el dibujo: el eje mayor es el segmento $\mathbf{1_0 7_0} = 1'7'$, y el eje menor, el segmento $\mathbf{4_0 10_0}$, igual

al diámetro del cilindro. La elipse puede ser construida con ayuda de estos ejes.

En la fig. 362 se muestra el desarrollo completo de la parte inferior del cilindro. La circunferencia desarrollada de la base del cilindro se ha dividido en partes iguales entre sí correspondientemente a las divisiones en la fig. 361; los segmentos de las generatrices han sido llevados a las perpendiculares trazadas por los puntos de división de la circunferencia desarrollada de la base del cilindro. Los extremos de estos segmentos corresponden a los puntos de la elipse. Por eso, trazando por estos puntos una línea curva, obtenemos la elipse desarrollada (esta línea representa una sinusoide), es decir, el canto superior del desarrollo de la superficie lateral del cilindro.

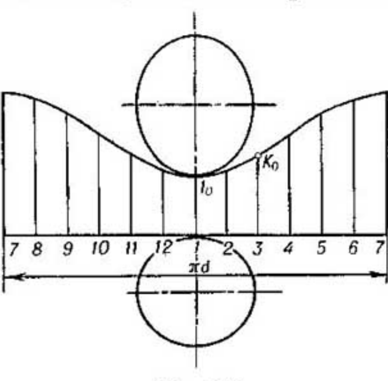


Fig. 362

Además del desarrollo de la superficie lateral, en la fig. 362 se dan el círculo de la base y la elipse (la forma verdadera de la sección), lo que ofrece la posibilidad de hacer el modelo del cilindro truncado.

En la fig. 363 está representado un cilindro elíptico con base circular; su eje es paralelo al plano V. Para determinar la sección normal de este cilindro, éste debe ser cortado con un plano perpendicular a las generatrices, en el caso dado, con un plano proyectante

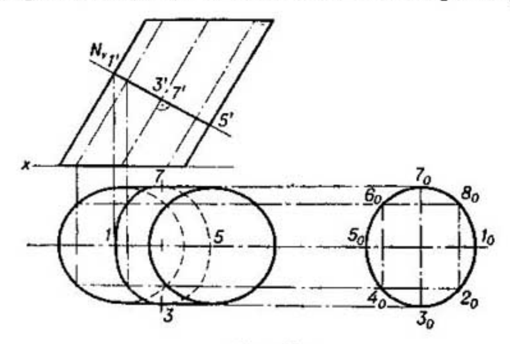


Fig. 363

frontal. La figura de la sección normal representa una elipse cuyo eje mayor es igual al segmento 3_07_0, y el menor, igual al segmento $1_05_0=1'5'$.

Si es necesario desarrollar la superficie lateral de este cilindro, entonces, disponiendo de la sección normal, se desarrolla la curva que la delimita en una línea recta y a los puntos correspondientes de esta recta, perpendicularmente a la misma, se llevan los segmentos de las generatrices, tomándolos de la proyección frontal. Para el desarrollo de las generatrices se divide la circunferencia de la base

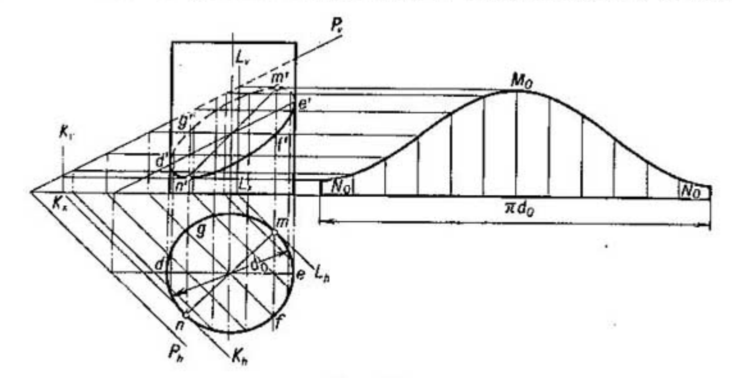


Fig. 364

en partes iguales. En este caso, también la elipse (la sección normal) será dividida en la misma cantidad de partes, pero no todas estas partes son de una misma longitud. El desarrollo de la elipse en una recta se puede efectuar llevando sucesivamente a esta recta partes de la elipse lo suficientemente pequeñas.

En la fig. 364 viene dado un cilindro circular recto cortado con un plano de posición general. En la sección se obtiene una elipse: el plano secante forma con el eje del cilindro cierto ángulo agudo.

Semejantemente a cómo esto sucedió en la fig. 361, la proyección horizontal de la sección se confunde con la proyección horizontal del cilindro. Por esta razón, la posición de la proyección horizontal del punto de intersección de cualquiera de las generatrices del cilindro con el plano P es conocida (por ejemplo, el punto a en la fig. 365). Para hallar la proyección frontal correspondiente se puede trazar en el plano P la horizontal o la frontal sobre la cual debe encontrarse el punto que se busca. En la fig. 365 se ha trazado la frontal; en el lugar en que la proyección frontal de la frontal corta a la proyección frontal de la generatriz correspondiente, se encuentra la proyección

a'. Una misma frontal determina dos puntos de la curva, A y B (fig. 365). Si se construye la frontal correspondiente al punto C, entonces esta línea determinará solamente un punto de la curva de intersección. La frontal construida con ayuda de los puntos D y E, determina los puntos extremos d' y e'.

Continuando las construcciones análogas se puede hallar un número suficiente de puntos para dibujar la proyección frontal de la línea de intersección.

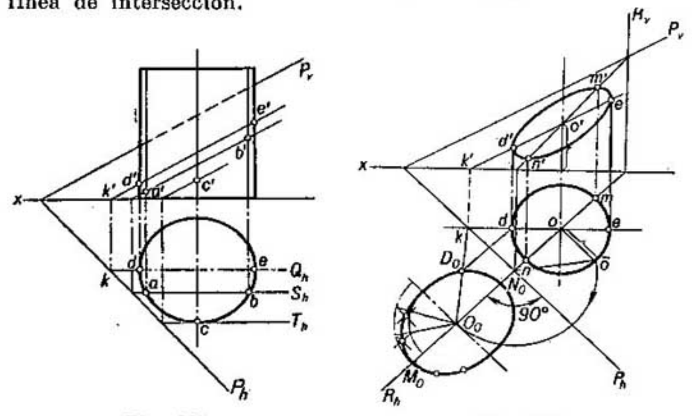


Fig. 365 Fig. 366

En la fig. 366 la parte superior del cilindro parece cortada. Si la proyección frontal se muestra totalmente, entonces la línea de intersección se dibuja así como se muestra en la fig. 364.

En la fig. 365 se muestran los planos frontales auxiliares Q, S, T que cortan al cilindro según las generatrices, y el plano P, según las frontales. Esto corresponde a lo dicho al principio del párrafo. El plano auxiliar T solamente hace contacto con el cilindro, lo que da la posibilidad de determinar solamente un punto para la curva.

Al construir la proyección frontal de la línea de intersección, además de los puntos d' y e' (fig. 365), se deben hallar dos puntos extremos, precisamente, los puntos m' y n' (los puntos más alto y más bajo de la proyección de la sección sobre el plano V). Para construir estos puntos debe elegirse un plano auxiliar perpendicular a la traza P_h y que pase por el eje del cilindro (fig. 366). Este plano es el plano común de simetría del cilindro y del plano secante P dados. Una vez hallada la línea de intersección de los planos P y R, señalamos los puntos m' y n', construyéndolos en la proyección frontal con ayuda de los puntos m y n.

Otro procedimiento para hallar los puntos m' y n' consiste en trazar dos planos tangentes al cilindro, cuyas trazas horizontales son paralelas a la traza P_h. Estos planos se cortarán con el plano P según las horizontales de este último (fig. 364, los planos auxiliares K y L); señalando los puntos m y n, construimos los puntos m' y n' sobre las proyecciones frontales de las horizontales halladas.

El segmento MN representa el eje mayor de la elipse (la figura de la sección producida en el cilindro dado por el plano P). Esto se ve también en la fig. 366, donde se ha construido la elipse (la forma verdadera de la sección) abatida sobre el plano H. Pero el segmento $m'n'$ en la misma figura no es, ni mucho menos, el eje mayor de la elipse (la proyección frontal de la figura de la sección). Este eje mayor puede ser hallado con ayuda de los diámetros conjugados $m'n'$ y $f'g'$ (fig. 364) valiéndose de la construcción indicada en el § 21, o con auxilio de la construcción especial expuesta en el párrafo 76.

La forma verdadera de la sección puede ser hallada abatiendo el plano secante sobre uno de los planos de proyección, H o V.

En la fig. 366, la elipse en la posición abatida se ha construido con ayuda de los ejes mayor y menor (en la misma figura, el punto D_0 se ha obtenido abatiendo la frontal).

El desarrollo de la superficie lateral se muestra en la fig. 364. Presten atención en que la marcación de los puntos (las proyecciones horizontales de las generatrices) en la circunferencia de la base se realizaba a partir del punto n. Con esto la construcción se simplificaba, puesto que con ayuda de una misma horizontal se obtienen dos puntos en la proyección frontal de la elipse. Además, la figura del desarrollo tiene eje de simetría. Pero en este caso, los puntos d y e no figuran entre los puntos marcados en la circunferencia.

En la fig. 367 se da otro ejemplo de construcción de la figura de la sección producida en un cilindro de revolución por un plano. Esta construcción se ha ejecutado con ayuda del método de cambio de los planos de proyección. El plano secante está dado por dos rectas que se cortan: la frontal (AF) y la recta de perfil (AP). Puesto que la proyección de perfil de la frontal y la proyección frontal de la recta de perfil se encuentran sobre una misma recta ($a' \equiv a''$, $a''f'' = a'p'$), estas rectas están situadas en los planos V y W respectivamente (véase la fig. 367 a la izquierda, el dibujo de arriba). El eje V/W pasa por $a''f''$ $(a'p')$.

Introducimos un nuevo plano S de tal manera que $S \perp W$ y $S \perp AP$. El plano secante resulta ser perpendicular al S, y la proyección de la figura de la sección sobre el plano S se obtiene en forma del segmento 2_s6_s, igual al eje mayor de la elipse (la figura de la sección). La posición de la recta a_s6_s se determina construyendo las proyecciones de los puntos A y 1 sobre el plano S.

Sigamos la construcción de algunos puntos. Para evitar las construcciones innecesarias, la proyección $1''$ se tomó en la prolongación de la perpendicular levantada desde el punto o'' al eje W/S. Con ayuda del punto $1''$ se obtuvo la proyección $1'$; el segmento $1'1''$, llevado sobre el eje W/S, determinó el punto 1_s y el punto o_s que se confunde con éste y que es la proyección del centro de la elipse. Conociendo las proyecciones o_s y o'' se puede obtener el punto o' (el centro de la elipse) de la proyección frontal buscada de la figura de la sección.

Con ayuda de los puntos 2_s y $2''$ se ha hallado el punto $2'$, el punto que menos dista del plano W, y con auxilio de los puntos 6_s y $6''$, el punto $6'$, el punto más alejado del plano W.

Con ayuda del punto $5''$ se ha tomado el punto 5_s, y ahora, con auxilio de los puntos 5_s y $5''$ se ha hallado el punto $5'$, que es uno de los puntos que determinan la división de la elipse en la proyección frontal del cilindro en las partes «vista» y «oculta». El segundo punto está situado simétricamente al punto $5'$ con respecto de o'.

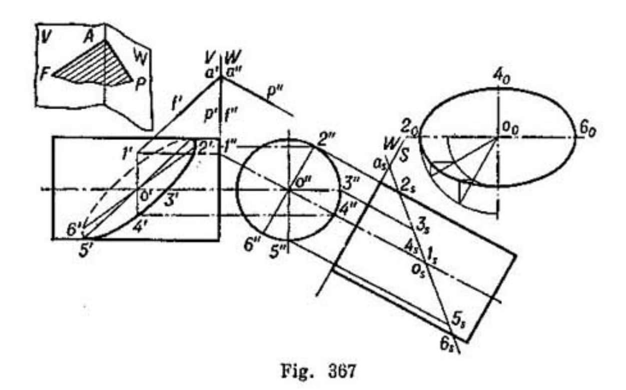


Fig. 367

Lo demás está claro del dibujo. La forma verdadera de la figura de la sección (una elipse en la fig. 367, a la derecha) se ha construido con ayuda de sus ejes: el mayor igual a 2_s6_s, y el menor, igual al diámetro del cilindro.

PREGUNTAS A LOS §§ 55 Y 56

1. ¿Cómo se construye la curva de intersección de una superficie curva con un plano?

2. ¿Según cuáles líneas se corta una superficie cilíndrica con un plano, trazado paralelamente a la generatriz de esta superficie?

3. ¿Cuál procedimiento se emplea en el caso general para hallar los puntos de intersección de una línea curva con un plano?

4. ¿Cuáles líneas se producen al cortar un cilindro de revolución con planos?

5. ¿En cuál caso la elipse que se obtiene en la intersección de un cilindro de revolución, cuyo eje es perpendicular al plano H, con un plano proyectante frontal, se proyecta sobre el plano W en forma de una circunferencia?

6. ¿Cómo debe ser situado el plano de proyección auxiliar, para que la elipse obtenida en la intersección de un cilindro de revolución, cuyo eje es perpendicular al plano H, con un plano de posición general, que forma con el eje del cilindro un ángulo de 45°, se proyecte sobre dicho plano de proyección auxiliar en forma de una circunferencia?

§ 57. INTERSECCION DE UNA SUPERFICIE CONICA POR UN PLANO. CONSTRUCCION DEL DESARROLLO

Para construir la línea curva obtenida en la intersección de una superficie cónica con un plano, en el caso general, se deben hallar los puntos de intersección de las generatrices con el plano secante.

Si el plano que corta a la superficie cónica pasa por su vértice, entonces se obtienen dos rectas, dos generatrices (en la fig. 368, las rectas AA_1 y BB_1).

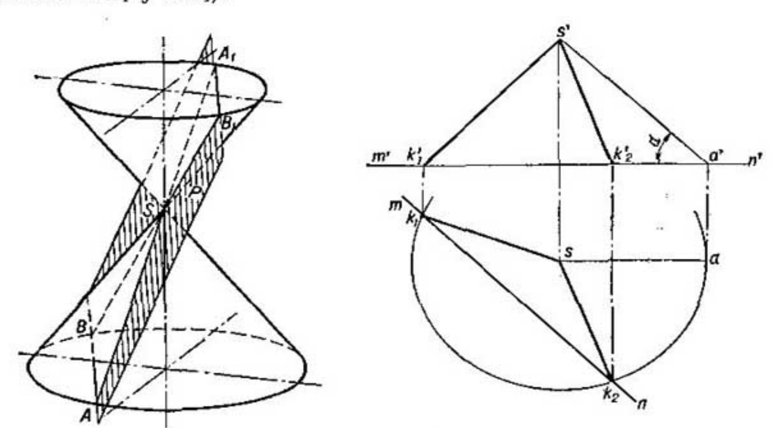


Fig. 368

Examinemos el ejemplo de construcción que ilustra tal intersección de la superficie cónica.

Supongamos que en el plano dado por el punto S y la recta horizontal MN (fig. 368, a la derecha), hay que trazar por el punto S una recta que forme con el plano H cierto ángulo α.

El lugar geométrico de las rectas que forman con el plano H el ángulo α, es una superficie de revolución cónica, cuyo eje es perpendicular al plano H, y cuyo vértice, según la condición, debe ser el punto S. Por consiguiente, el plano dado pasa por el vértice del cono y corta a su superficie según rectas (generatrices). Estas rectas serán las buscadas: ellas pasan por el punto S en el plano dado y bajo el ángulo dado α al plano H.

Ahora queda representar el cono (éste está representado parcialmente), para lo cual se ha trazado la recta $s'a'$ y el arco de circunfe-

rencia con centro en el punto s y de radio igual a sa, además, la base del cono se ha tomado en el plano horizontal que pasa por la recta dada MN.

Lo demás está claro del dibujo. Comparen esta construcción con la ejecutada en las figs. 245 y 246 en el § 38.

En la fig. 369 a la izquierda, se muestra un cono circular recto, situado sobre el plano H. El plano Q es tangente al cono dado; la tangencia tiene lugar según la generatriz SC, la traza Q_h hace contacto con la circunferencia (la proyección horizontal de la base del cono); el hecho de que el punto S se encuentra en el plano Q, se

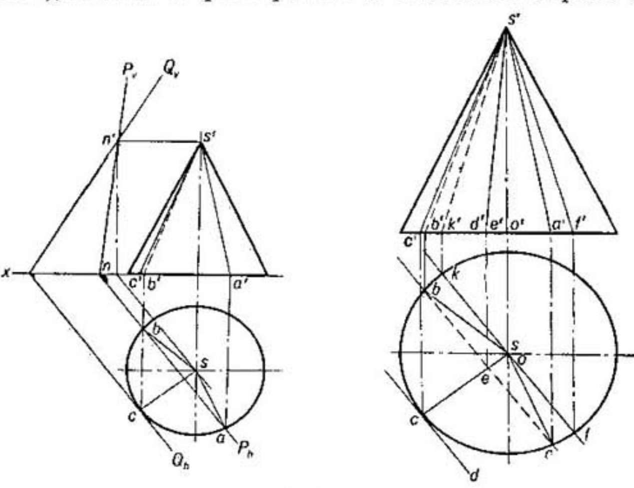


Fig. 369

establece con la ayuda de la horizontal SN. El plano P pasa por el vértice del cono dado y corta a este cono según las generatrices SA y SB.

En la misma figura a la derecha, los planos vienen dados no por sus trazas. El plano tangente al cono está dado por la generatriz SC y la recta CD tangente a la circunferencia de la base del cono. El plano que pasa por el vértice y que corta al cono según las generatrices SA y SB, está dado por la recta AB en el plano de la base del cono y la recta SE que pasa por el vértice del cono y que corta a la recta AB en el punto E.

Si el plano pasa por el eje del cono, entonces éste lo corta según las generatrices con el máximo, para el cono dado, ángulo entre ellas.

En la fig. 369 a la derecha, dichas generatrices son la SF y la SK; el ángulo entre ellas es igual al ángulo cuyo vértice se encuentra entre las rectas de contorno en la proyección frontal del cono.

Si el cono de revolución se corta con un plano que no pasa por su vértice, entonces, en la intersección se obtiene una de las cuatro curvas siguientes: 1) una *elipse*, si el plano secante corta a todas las generatrices de una hoja de la superficie o, de otro modo, si no es paralelo a ninguna de las generatrices del cono (en la fig. 370, los

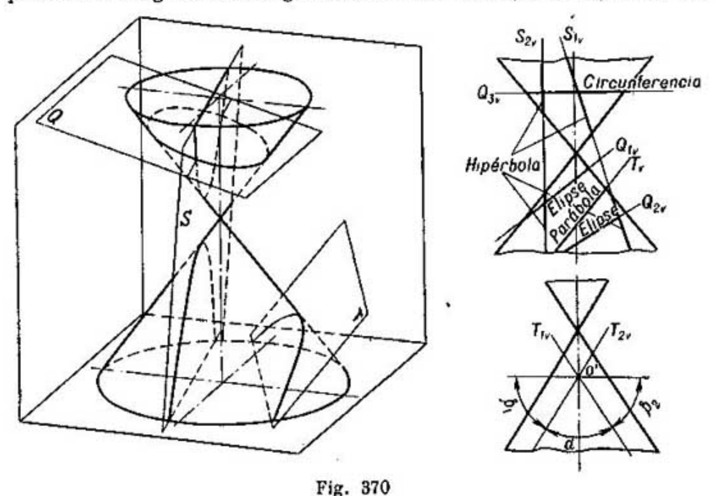


Fig. 370

planos Q, Q_1 y Q_2); en este caso, el ángulo formado por el plano secante con el eje del cono es mayor que el ángulo entre este eje y la generatriz del cono; 2) una *circunferencia*[1], si el plano secante es perpendicular al eje del cono (en la fig. 370, el plano Q_3); 3) una *parábola*, si el plano secante es paralelo solamente a una de las generatrices (en la fig. 370, el plano T); en este caso los ángulos entre el plano secante y el eje del cono y entre este eje y la generatriz del cono son iguales entre sí; 4) una *hipérbola*, si el plano secante es paralelo a dos generatrices (en la fig. 370, los planos S, S_1 y S_2); en este caso el ángulo formado por el plano secante con el eje del cono es menor que el formado por este eje con la generatriz del cono.

En la fig. 370 a la derecha, en el dibujo inferior se muestran los ángulos α, β_1 y β_2. El ángulo α es el ángulo entre las trazas T_{1v} y T_{2v}

[1] Puede ser considerada como una elipse con ejes iguales en el límite.

de los planos que cortan al cono según parábolas. Si se trazan las trazas por el punto o' dentro del ángulo α, se determinan los planos que cortan al cono según hipérbolas, y si las trazamos por el punto o' dentro de los ángulos β_1 y β_2, entonces quedarán determinados los planos que cortan al cono según elipses.

Examinemos la demostración de que *al cortar al cono de revolución con un plano que no sea paralelo a ninguna de sus generatrices* (*y que no pase por su vértice*), *se obtiene una elipse*.

Independientemente de cómo en el caso dado estén situados en el espacio el cono y el plano secante, siempre se pueden llevar, con ayuda de la transformación del dibujo, a tal posición en la que el eje del cono es perpendicular al plano H, y el plano secante es un plano proyectante frontal. Precisamente en tal posición vienen dados en la fig. 371 el cono y el plano que lo corta T, además, están dadas dos proyecciones del cono: la frontal y la de perfil.

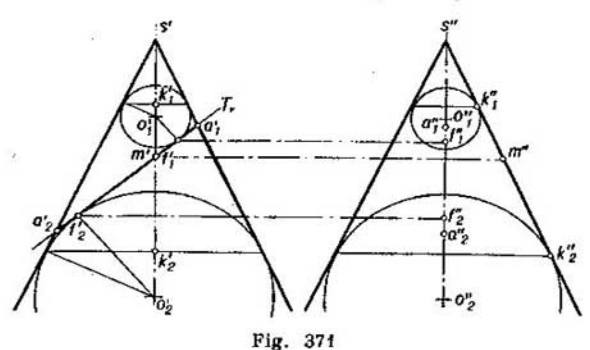


Fig. 371

En el cono se han inscrito esferas tangentes al plano T en los puntos F_1 y F_2, y al cono, según los paralelos que pasan por los puntos K_1 y K_2 respectivamente. Los puntos F_1 y F_2 se obtienen en el plano del meridiano principal y, por consiguiente, están situados sobre una misma recta con los puntos A_1 y A_2 pertenecientes a la sección producida en el cono por el plano T. La figura sección se proyecta sobre el plano V en forma del segmento $a'_1a'_2$.

Examinemos la generatriz del cono situada en el plano de perfil, y marquemos sobre ella los puntos K_1 y K_2, en los cuales las esferas inscritas hacen contacto con esta generatriz, y el punto M perteneciente a la misma generatriz y a la curva de intersección del cono con el plano T. Es conocido, que los segmentos de las tangentes trazadas desde cualquier punto a la esfera y determinadas por este punto y los puntos de tangencia, son iguales entre sí. De aquí $MK_1=MF_1$ y $MK_2=MF_2$. Sumando miembro a miembro estas igualdades obtenemos que $MK_1+MK_2=MF_1+MF_2$. Pero $MK_1+MK_2=K_1K_2$, es decir, la suma de las distancias desde cierto punto, tomado sobre la curva de intersección, hasta dos puntos fijos F_1 y F_2, pertenecientes al plano de esta sección, es una magnitud constante igual, en el caso dado, al segmento K_1K_2. Este segmento de la generatriz del cono está situado entre dos de sus paralelos y no depende de la elección del punto M sobre la curva de intersección. En efecto, si en la curva de

intersección del cono se tomase no el punto M, sino otro cualquiera, entonces la generatriz que pasa por este punto haría contacto con ambas esferas en los puntos de los mismos paralelos. El segmento de esta generatriz entre los puntos de tangencia sería igual al mismo segmento K_1K_2.

La conclusión sacada demuestra que el punto M pertenece al lugar geométrico de los puntos, la suma de las distancias de los cuales a dos puntos dados tiene cierto valor constante. Esto corresponde a la definición de la *elipse*.

De modo semejante se sacan las conclusiones para los casos de intersección del cono de revolución según una parábola y una hipérbola.

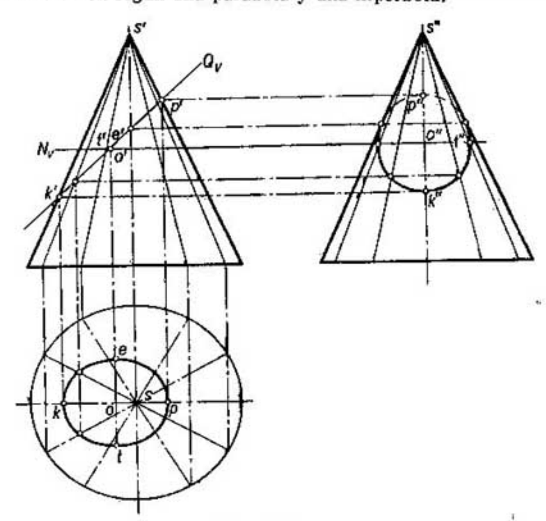


Fig. 372

En la fig. 372 está representado un cono de revolución intersecado por un plano proyectante frontal. Los puntos de intersección de la traza Q_v con las proyecciones frontales de las generatrices representan las proyecciones de los puntos de la curva de intersección que se busca, que en el caso dado es una *elipse*. Con ayuda de estas proyecciones han sido halladas las proyecciones sobre los planos H y W.

Uno de los ejes de la elipse (el mayor) se proyecta sobre el plano V en forma del segmento $k'p'$. El otro (el menor), que es perpendicular al plano V, tiene como proyección un punto: el punto medio del segmento $k'p'$.

Si se traza el plano N por el punto O perpendicularmente al eje del cono (en el caso dado paralelamente al plano H), la proyección del eje menor (fig. 373) se obtendrá en forma de la cuerda *te* de una

circunferencia (la proyección horizontal de la sección producida en el cono por el plano N).

La proyección del eje menor puede ser obtenida también valiéndose de la construcción indicada en la fig. 373 a la derecha. El cono se ha cortado según un triángulo, girado y abatido sobre el plano V. El segmento o_0t_0 es igual al semieje menor. Trazando este segmento desde el punto o perpendicularmente a kp obtenemos el eje menor ($tt_1=2o_0t_0$).

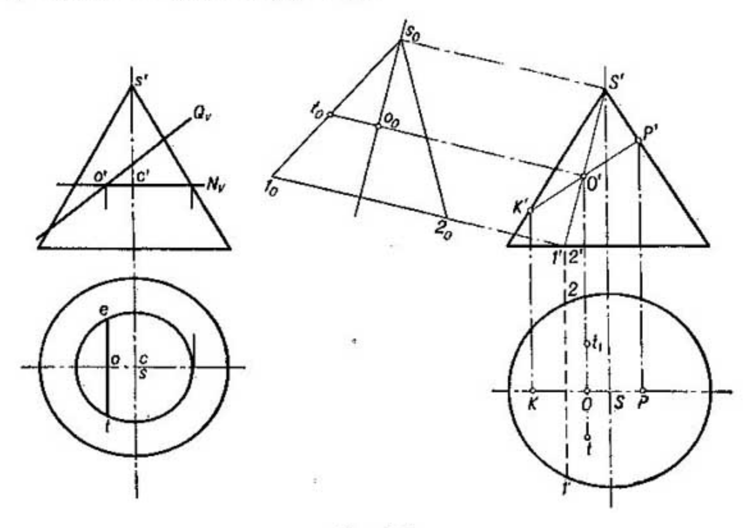


Fig. 373

Las proyecciones de la figura sección sobre los planos H y W son elipses. La proyección sobre el plano W puede ser una circunferencia: en esta proyección, en el caso de cierta inclinación del plano secante, las proyecciones de los ejes de la elipse pueden ser iguales. La proyección de la figura sección (elipse) sobre el plano perpendicular al eje del cono (en el caso dado sobre el plano H), no puede ser una circunferencia.

En la fig. 374 a la izquierda se muestra cómo hallar, para cierto cono, la dirección de la traza frontal de los planos proyectantes frontales que cortan a este cono según elipses que se proyectan sobre el plano W en forma de circunferencia. La construcción se ejecuta en la proyección frontal del cono. La bisectriz del ángulo $s'm'k'$ corta al eje de simetría de la proyección en el punto n'. Levantando en este punto la perpendicular a la bisectriz $m'n'$. Levantando en este punto la perpendicular a la bisectriz $m'n'$, hallamos el punto p'. La recta trazada por los puntos k' y p', da la dirección para las trazas frontales de los planos secantes que se buscan. La tarea se reduce a la construcción de la diagonal del

trapecio isósceles $k'm'p'q'$, en el cual se puede inscribir una circunferencia con centro en el punto n'. Trazando por el punto n' una recta paralela a $q'p'$, obtenemos el punto o', que es la proyección del centro de la elipse cuya proyección frontal es el segmento $k'p'$.

¿Se proyectará sobre el plano W en forma de circunferencia la elipse obtenida en la intersección de un cono con el plano Q (fig. 374, a la derecha)? La construcción en la fig. 374 da uno de los procedimientos de comprobación: por el punto p' trazamos una recta paralela a la base, trazamos la bisectriz del ángulo $p'q'k'$, obtenemos el punto n'. Puesto que la perpendicular trazada desde el punto n' a esta bisectriz no pasa por el punto k', la proyección de la sección sobre el plano W será una elipse, y no una circunferencia.

En la fig. 375 se muestra la construcción de la proyección frontal de la hipérbola obtenida al cortar un cono de revolución con un plano proyectante horizontal.

Dado que la proyección horizontal de la hipérbola se confunde con la traza S_h, en la intersección de S_h con la proyección horizontal de la base se determinan los puntos a y b, y con auxilio de éstos, las proyecciones a' y b'.

Para hallar el punto c' (el punto más alto de la proyección de la hipérbola sobre el plano V) se ha trazado

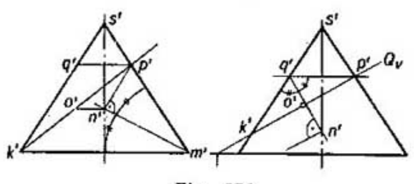


Fig. 374

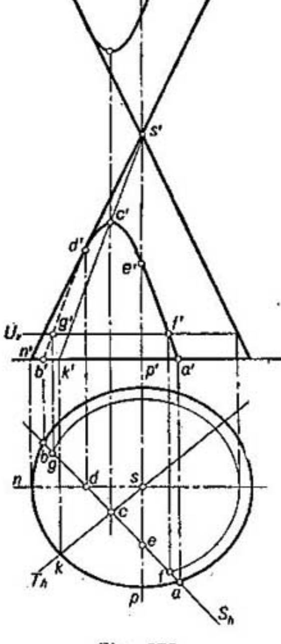


Fig. 375

el plano proyectante horizontal auxiliar T por el eje del cono perpendicularmente a la traza S_h. La proyección horizontal c del punto C buscado se obtiene en la intersección de S_h con T_h; una vez hallada la proyección frontal de la generatriz SK, marcamos sobre ella el punto c'.

Luego, se ha hallado el punto d', en el que la proyección frontal de la hipérbola se divide en las partes vista y oculta. Este punto se halla con ayuda de la generatriz SN.

Para hallar los demás puntos de la hipérbola se puede trazar unas cuantas generatrices en los límites de la parte de la superficie del cono marcada con las letras $SAKB$, o unos cuantos planos secantes auxiliares. En la fig. 375 se muestra uno de estos planos auxiliares (el plano horizontal U que corta a la superficie del cono según una circunferencia). Con ayuda de este plano se han hallado los puntos F y G.

En la segunda hoja de la superficie cónica se obtiene la segunda rama de la hipérbola.

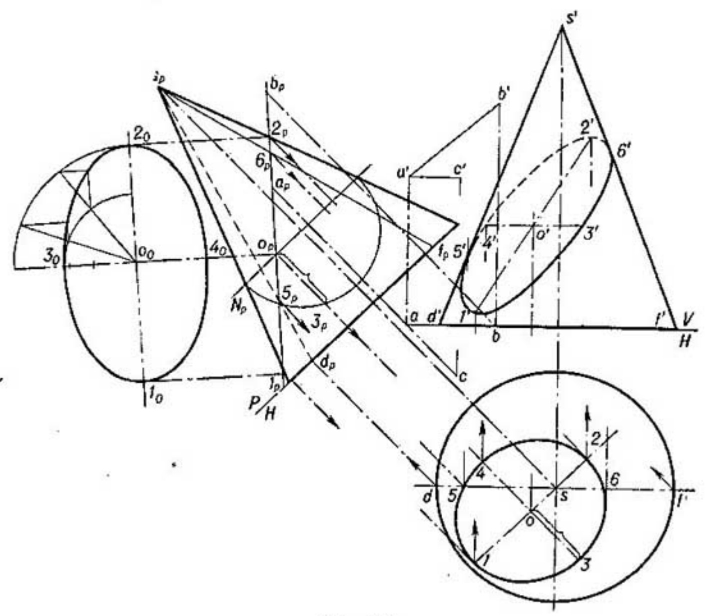


Fig. 376

En la fig. 376 se muestra la construcción de las proyecciones de la figura sección producida en un cono circular recto por un plano de posición general, dado por la horizontal AC y la frontal AB, y la forma verdadera de la figura sección.

La construcción se ha ejecutado con ayuda del método de cambio de los planos de proyección. Se ha introducido un plano auxiliar de proyección P, elegido de tal manera que sea perpendicular no

sólo al plano H, sino también al plano secante: el eje P/H se ha trazado perpendicularmente a la proyección ac. Sobre el plano P, el plano secante tiene como proyección una recta sobre la cual está situada la proyección de la figura sección (el segmento 1_p2_p). Con esto queda determinado el eje mayor de la elipse, según el cual el cono se corta por el plano dado. En el punto o_p que divide al segmento 1_p2_p por la mitad, se encuentra la proyección del centro de la elipse. El plano N, trazado perpendicularmente al eje del cono, permite hallar el eje menor de la elipse (en la fig. 376 se ha trazado una semicircunferencia y sobre ella el segmento o_p3_p, igual a la mitad del eje menor de la elipse). Con ayuda de los puntos $o_p, 1_p$ y 2_p se han hallado las proyecciones o, 1 y 2, y luego las proyecciones o', $1'$ y $2'$, que se encuentran del eje V/H a la misma distancia que las proyecciones o_p, 1_p y 2_p del eje P/H. El punto $2'$ es el punto más alto de la proyección frontal; el punto $1'$ es el punto más bajo de los puntos de la elipse (la proyección frontal de la sección). Para determinar la posición de los puntos $5'$ y $6'$, en los cuales la elipse en la proyección frontal se divide en las partes «vista» y «oculta», se han construido las proyecciones s_pd_p y s_pf_p de las generatrices SD y SF, se han hallado los puntos 5_p y 6_p y con ayuda de éstos las proyecciones 5 y 6, y a continuación las $5'$ y $6'$. Pero se hubiera podido hallar aunque fuera solamente el punto $5'$ y trazar por él una recta paralela a la proyección $a'b'$, puesto que el plano del meridiano principal del cono corta al plano secante dado según la frontal.

El eje menor de la elipse se proyecta sobre el plano H en verdadera magnitud (el segmento $3-4$), situándose sobre la horizontal del plano secante, y es también el eje menor de la elipse que representa la proyección horizontal de la figura sección. La forma verdadera de esta figura se ha obtenido construyendo la elipse con ayuda de su eje mayor ($1_02_0=1_p2_p$) y su eje menor ($3_04_0=3-4$).

En la fig. 377 se muestra una construcción semejante, cuando el plano secante está dado por sus trazas.

La construcción de las proyecciones de la sección se ha comenzado hallando los puntos pertenecientes al contorno de la proyección frontal del cono. Para ello se ha trazado por el eje del cono el plano secante auxiliar R paralelo al plano V; la traza de este plano es R_h. El plano R corta al plano P según la frontal, y al cono, según dos generatrices. Los puntos A y B, obtenidos en la intersección de la frontal con las generatrices, pertenecen a la línea de intersección buscada del cono con el plano P.

En los puntos a' y b' la proyección frontal de la línea de intersección hace contacto con el contorno de la proyección frontal del cono y se divide en dos partes: la vista y la oculta. Luego se han construido dos puntos característicos más [1], a saber: los puntos superior e inferior de la sección, para lo cual se ha

[1] Se llaman puntos característicos a tales puntos de la curva de intersección, como el más alejado y el más cercano al plano de proyección, a los puntos que dividen a la curva en las partes vista y oculta, y a los extremos de los ejes de las elipses.

trazado el plano secante auxiliar Q, que es un plano proyectante horizontal, perpendicular a la traza P_h y que pasa por el eje del cono. El plano Q corta al cono según las generatrices ST ($s't'$, st) y SU ($s'u'$, su), y al plano P, según la línea NK ($n'k'$, nk). Los puntos C y D, obtenidos en la intersección de las generatrices ST y SU con la recta NK, serán los puntos buscados. El segmento CD es el eje mayor de la elipse que se obtiene en la intersección del cono dado con el plano P.

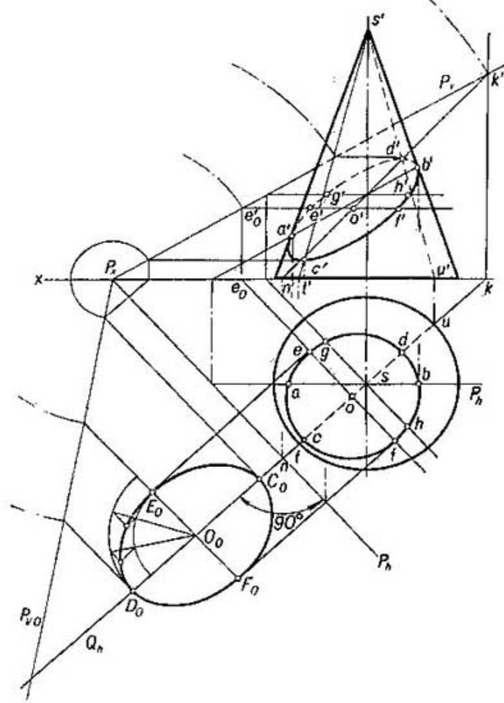


Fig. 377

La proyección cd es el eje mayor de la elipse que representa la proyección horizontal de la sección. Dividiendo CD por la mitad obtendremos la posición del centro de la elipse; los puntos o' y o son los centros de las elipses (las proyecciones de la figura sección).

Para hallar los puntos intermedios de la línea de intersección es cómodo valerse de planos secantes horizontales, puesto que éstos cortan a la superficie del cono según circunferencias, y al plano P, según horizontales. Para esta construcción son útiles solamente aquellos planos cuyas trazas frontales están situadas en los límites entre c' y d', puesto que en el caso dado por encima del punto

d' y más abajo del punto c' no pueden haber puntos pertenecientes a la línea de intersección. En la fig. 377 se muestra la construcción de los puntos E, F, G y H, con la ayuda de dos de dichos planos; uno de ellos ha sido trazado por el punto O, gracias a lo cual se ha determinado el segmento ef, que representa el eje menor de la elipse obtenida en la intersección del cono con el plano P y al mismo tiempo, el eje menor de la proyección horizontal de ésta elipse.

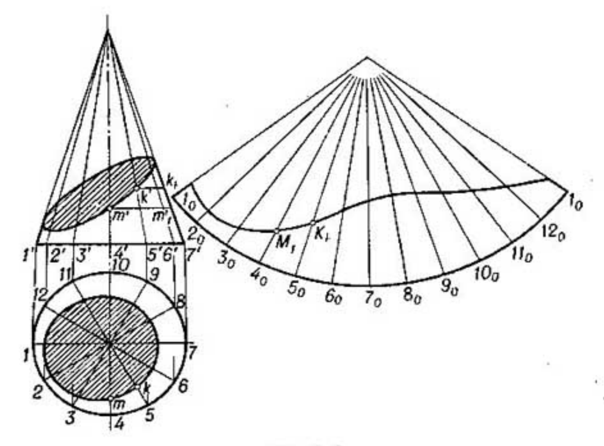


Fig. 378

Los segmentos $c'd'$ y $e'f'$ son diámetros conjugados para la elipse (la proyección frontal de la figura sección). Con ayuda de estos segmentos se pueden hallar los ejes de la elipse[1].

La forma verdadera de la sección se ha hallado abatiendo el plano secante sobre el plano H. La elipse puede ser construida con ayuda de sus ejes mayor y menor, cuyas longitudes se han hallado abatiendo los puntos extremos de los ejes: C_0 y D_0 del eje mayor, y E_0 y F_0 del eje menor.

En la fig. 378 se muestra la construcción del desarrollo. La superficie lateral se desarrolla en un sector circular. El ángulo del sector se calcula por la fórmula $\alpha = \frac{r}{l} \cdot 360°$, donde r es el radio de la circunferencia de la base del cono, y l, la generatriz del cono.

Para marcar en la superficie lateral desarrollada del cono la línea de intersección, se traza una serie de generatrices del cono y se determinan las longitudes de sus segmentos; luego se trazan las generatrices en la superficie lateral desarrollada del cono y se marcan las longitudes de los segmentos de estas generatrices. En la fig. 378 se ha construido el desarrollo de la superficie lateral y en éste se ha marcado la línea de intersección. La longitud de los segmentos de las generatrices se ha determinado girando las generatrices hasta la posición paralela al plano V (esta construcción se muestra para dos generatrices).

---

[1] Sobre los diámetros conjugados de la elipse véase el § 21.

En la fig. 379 se muestra la determinación de los puntos de la curva de intersección de cierto cono con un plano de posición general Q, más alejado y más cercano al plano H. Para la construcción de estos puntos se han trazado los planos P y T, tangentes al cono, de tal modo que sus trazas P_h y T_h sean paralelas a Q_h; con esto quedan determinadas las generatrices de la superficie cónica sobre las cuales deben estar situados los puntos que se buscan K y M.

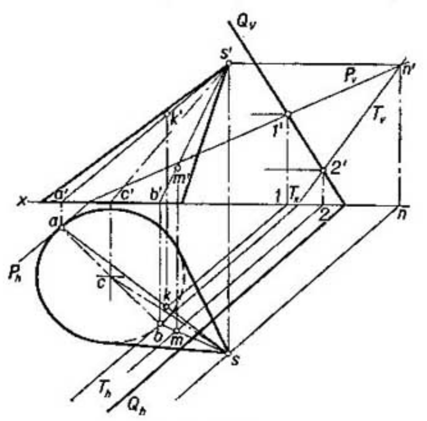


Fig. 379

Primeramente se construyen las proyecciones horizontales k y m en los puntos de intersección de las proyecciones horizontales de las horizontales, según las cuales los planos P y T cortan al plano Q, con las proyecciones horizontales de las generatrices SA y SB, y a continuación, en las proyecciones frontales de estas generatrices se marcan las proyecciones k' y m'.

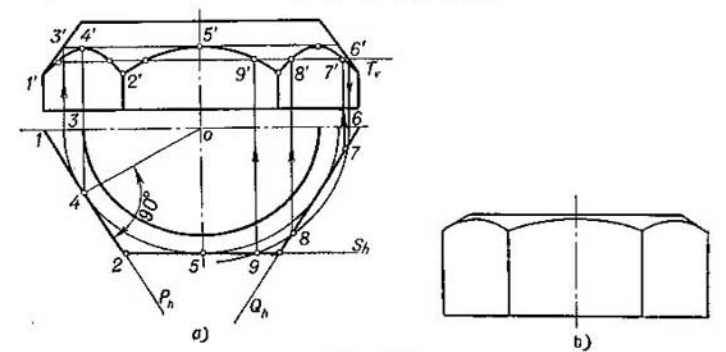


Fig. 380

En la fig. 380, *a* se muestra la construcción de las curvas que se obtienen en la superficie de un cono de revolución al cortarlo con las caras de un prisma hexagonal regular[1]. Dos de las caras laterales están situadas en los planos proyectantes horizontales *P* y *Q*, y la tercera, en el plano frontal *S*. La posición de estos planos respecto al eje del cono permite determinar en seguida cuáles curvas se obtendrán en la intersección. Se obtienen hipérbolas, además, una de ellas se proyecta sobre el plano *V* en verdadera magnitud.

Para hallar los puntos de las curvas se han tomado los paralelos del cono. Ante todo se han hallado los puntos extremos *1*, *4*, *2* y *5* en la proyección horizontal, y con ayuda de éstos se han hallado los puntos *1'*, *4'*, *2'* y *5'* en la proyección frontal. Luego con ayuda del plano horizontal auxiliar *T* se ha determinado primero el punto *6'* sobre el contorno de la proyección frontal del cono y a continuación se ha obtenido el punto *6* y cor ayuda de la circunferencia de radio *o6* se han construido los puntos *7*, *8* y *9* con auxilio de los cuales se han hallado los puntos *7'*, *8'* y *9'*.

En la fig. 380, *b* está representada una tuerca de seis aristas (viene dada solamente la vista anterior); las curvas que separan las caras laterales de la tuerca de su parte cónica, representan hipérbolas, la construcción de las proyecciones de las cuales es análoga a la mostrada en la fig. 380, *a*.

PREGUNTAS AL § 57

1. ¿En qué consiste el procedimiento general de construcción de la línea curva que se obtiene en la sección producida en una superficie cónica por un plano?
2. ¿Cómo debe trazarse el plano para que éste corte a una superficie cónica según líneas rectas?
3. ¿Cuáles curvas se obtienen al cortar un cono de revolución con planos?
4. ¿En toda superficie cónica puede ser inscrita una esfera?
5. ¿Cómo se construye el eje menor de la elipse que se obtiene al cortar un cono de revolución con un plano?
6. ¿Cuál curva tiene como proyección sobre el plano perpendicular al eje del cono la elipse que se obtiene al cortar un cono de revolución?
7. ¿Cómo se construye el desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución?
8. ¿Qué representan las curvas en una tuerca con bisel cónico?

§ 58. INTERSECCIÓN DE UNA ESFERA Y UN TORO POR UN PLANO. EJEMPLO DE CONSTRUCCIÓN DE LA «LÍNEA DE CORTE» EN LA SUPERFICIE DE UN CUERPO DE REVOLUCIÓN COMPUESTO

Independientemente de cómo esté dirigido el plano secante, éste siempre corta a la esfera según una circunferencia, que se proyecta en forma de un segmento de recta, de una elipse o de una circunferencia, en dependencia de la posición del plano secante con respecto del plano de proyección (fig. 381). El eje mayor de la elipse (*3—4*), que es la proyección horizontal de la circunferencia sección, es igual al diámetro de esta circunferencia (*3—4=1'2'*); el eje menor *1—2*

[1] Para economizar sitio, la proyección horizontal se representa no totalmente, sino solamente la mitad.

se obtiene por proyección. Los puntos *5'* y *6'* en la proyección frontal del ecuador dan la posibilidad de hallar los puntos *5* y *6*, en los que la elipse (la proyección horizontal de la circunferencia) se divide según la visibilidad sobre el plano H.

Al construir las proyecciones de la circunferencia que se obtiene al cortar una esfera con un plano, se emplean planos auxiliares (véase la pág. 238), que dan, por ejemplo, en la esfera sus paralelos, y en el plano las horizontales. Se emplea también la transformación del dibujo con el fin de obtener la perpendicularidad del plano secante con respecto del plano de proyección auxiliar.

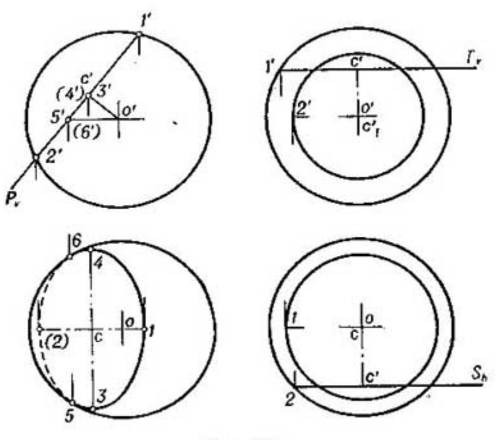


Fig. 381

La construcción de la curva de intersección de un toro con un plano se realiza también con ayuda de planos que cortan al toro y al plano secante. En este caso, para el toro se eligen planos que lo corten según circunferencias (recordemos que el toro posee dos sistemas de secciones circulares: en los planos perpendiculares a su eje, y en los planos que pasan por este eje). El esquema de construcción en lo fundamental es análogo al mostrado en la fig. 359. En efecto, en la fig. 382 se muestra que los planos auxiliares S_1 y S_2, perpendiculares al eje del toro (en el caso dado del anillo circular), cortan a su superficie según las circunferencias de radios R_1 y R_2, y al plano P, según rectas que se proyectan sobre el plano V en los puntos *3'*, *5'* y *7'*, es decir, perpendiculares al plano V. De ahí se obtienen los puntos de la figura sección.

Aclaremos la construcción en la fig. 382. Para el anillo circular se dan las representaciones: la mitad de la proyección frontal y la proyección de perfil. El anillo se corta con el plano proyectante frontal P. La semicircunferencia de radio R_1 es la línea de intersección del anillo con el plano frontal auxiliar S_1. Esta semicircunferencia hace contacto con la traza P_v; por eso se determina solamente un punto ($3'$, $3''$) de la línea de intersección de la superficie del anillo con el plano P sobre el plano S_1. Pero si se traza el plano S_2, entonces, sobre este plano se encontrarán dos puntos pertenecientes a la línea de intersección buscada. El plano S_2 determina en la superficie del anillo la semicircunferencia de radio R_2 que corta a la traza P_v en

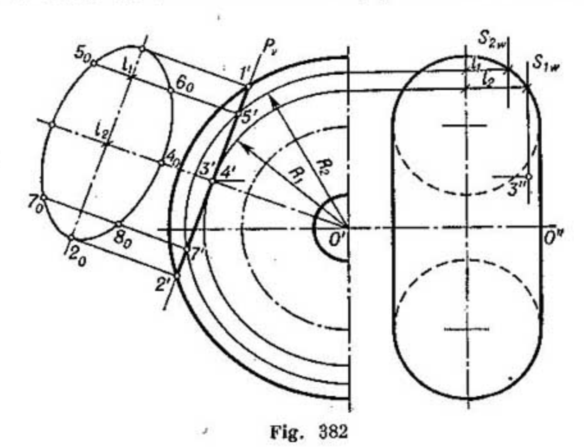


Fig. 382

dos puntos $5'$ y $7'$, que son las proyecciones frontales de los puntos de intersección de la superficie del anillo con el plano P. Así se puede proceder unas cuantas veces más y obtener una serie de puntos pertenecientes a la línea de intersección buscada.

La figura sección posee ejes y centro de simetría. Las distancias l_1 y l_2, determinadas en el curso de la construcción, desde los planos S_1 y S_2 hasta, en este caso, el plano vertical de simetría del anillo circular, se emplean para marcar los puntos 3_0 y 5_0 al construir la forma verdadera de la sección (para marcar los puntos 4_0, 6_0, 7_0 y 8_0 se ha hecho uso de la simetría).

La curva de intersección obtenida nos recuerda una elipse. Pero, claro está, esto es sólo una semejanza exterior, que además no es muy grande. La elipse es una curva de segundo orden (véase el § 21), mientras que la curva construida de intersección de la super-

ficie del toro con el plano se expresa con una ecuación algebraica de cuarto orden[1].

En la fig. 383 se muestran las secciones producidas en la superficie de un toro abierto (anillo circular), en el primer caso, por un plano que pasa por el eje del toro ($l=0$, donde l es la distancia desde el plano secante hasta dicho eje), que son dos circunferencias, y en los demás casos (2—5) el plano corta a dicha superficie según curvas en dependencia de l, R y r.

A las curvas obtenidas se les llama *curvas de Perseo* (uno de los geómetras de la Antigua Grecia). *Esta son curvas algebraicas de cuarto orden.*

Las curvas (2—5) mostradas en la fig. 383, tienen diferente forma: de óvalo con un eje de simetría (2), de curva de dos lóbulos con punto nodal en el origen de coordenadas (3), de curva ondulatoria (4), de óvalo con dos ejes de simetría (5) (véase la fig. 382). Estas curvas pasan a ser *óvalos de Cassini* [2] (un caso particular de las curvas de Perseo) en los casos siguientes: para el toro abierto (siendo $R>2r$, si $R=2r$ y cuando $R<2r$), para un toro cerrado ($R=r$) y para un toro

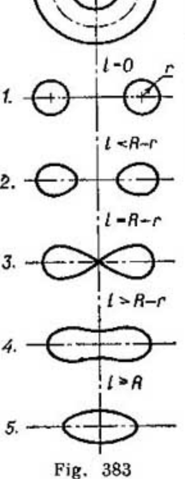


Fig. 383

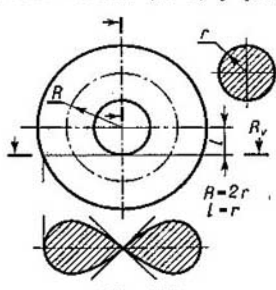


Fig. 384

que se corta a sí mismo ($R<r$), si $l=r$, con la particularidad de que para el toro abierto (anillo circular) siendo $R=2r$ se obtiene la *lemniscata de Bernoulli*[3]; para

---

[1] La curva cerrada construida en la fig. 382 se refiere a los *óvalos*, es decir, *a las curvas planas cerradas convexas que no poseen puntos angulares*. Entre los óvalos pueden haber compuestos de arcos de circunferencias y, por consiguiente, trazados con ayuda de un compás; pero esto no da motivo para considerar como óvalos solamente a tales líneas.

[2] Juan Domingo Cassini (1625—1712), astrónomo. El óvalo de Cassini es una curva algebraica de cuarto orden, simétrica respecto de los ejes de coordenadas, el lugar geométrico de los puntos M, para los cuales $F_1M \cdot F_2M = a^2$, donde F_1 y F_2 son puntos fijados (focos), y a es una constante.

[3] Lemniscata procede de la palabra griega *lemniscos* que significa cinta. Daniel Bernoulli (1700—1782), matemático y mecánico, desde 1725 hasta 1733, académico de la Academia de Ciencias de San Petersburgo fundada por Pedro I en el año 1724 (en la actualidad, Academia de Ciencias de la URSS). La lemniscata de Bernoulli es el lugar geométrico de los puntos M, para los cuales $F_1M \cdot F_2M = \left(\frac{F_1F_2}{2}\right)^2$, donde F_1 y F_2 son puntos fijados (focos).

ésta su origen (fig. 384) es un punto doble: las tangentes ($y = \pm x$) son perpendiculares entre sí[1].

En la fig. 385 viene representado cierto cuerpo de revolución, delimitado en la parte que se examina por tres superficies cilíndricas, una cónica, una esférica y tres superficies de anillo circular, y también por dos planos, que en la posición representada en la fig. 385 son frontales (en el dibujo vienen dadas sólo las mitades de la vista superior y del corte de perfil).

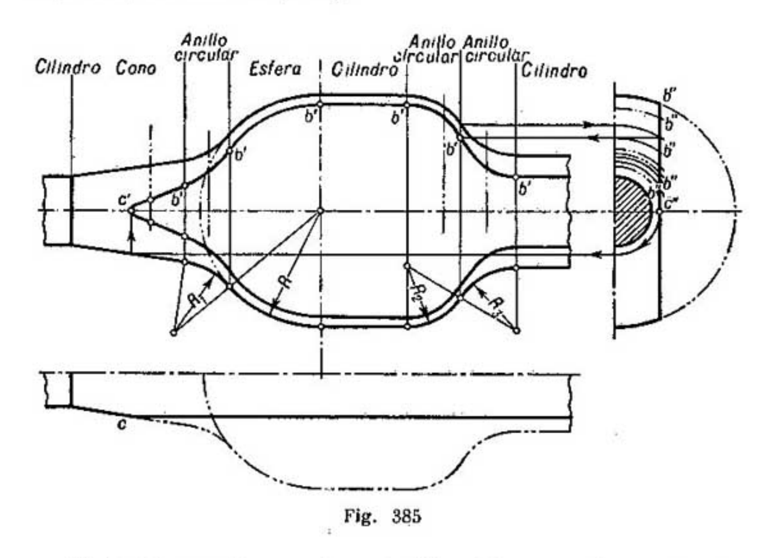


Fig. 385

En la intersección con la superficie del cuerpo de revolución, estos planos dan precisamente «líneas de corte», que se encuentran con frecuencia en las piezas, que representan cuerpos de revolución.

Ante todo se han establecido las «zonas» o sectores de las superficies de revolución que delimitan al cuerpo dado. Esto se ha cumplido con ayuda de los puntos de conjugación, hallados bien sobre las líneas de centros o bien sobre las perpendiculares a las generatrices del cono y de los cilindros[2]. Por los puntos de conjugación se han trazado planos de perfil que cortan a cada superficie según

---

[1] A los que les interesen unos datos más detallados acerca de las curvas de Perseo y sus casos particulares les recomendamos el libro de A. A. Savélov «Curvas planas».

[2] En la fig. 385 los puntos de conjugación se muestran sólo en una mitad de la vista anterior.

una circunferencia. Los arcos de estas circunferencias representados en el plano W determinan las proyecciones de perfil de los puntos característicos en la línea de corte. Por la posición de los puntos b'' se determina la posición de la proyección b'.

La línea de corte en el cono, en este caso, es una hipérbola. Su vértice (el punto c') ha sido hallado en virtud de la posición evidente de la proyección c''. Conociendo la posición del punto c'' determinamos la proyección del arco de circunferencia, sobre el cual debe estar situado el punto C.

Se muestra también la construcción con ayuda de un punto (intermedio) en cada sección de la línea de corte. La construcción está clara del dibujo. En las zonas de la esfera y los cilindros los puntos «intermedios» no es necesario hallar, puesto que la esfera se ha «cortado» según una circunferencia, representada en la vista principal en verdadera magnitud, con la particularidad de que el radio de esta circunferencia se obtiene como el mayor de los segmentos $c''b''$, y las superficies cilíndricas han sido «cortadas» según las generatrices.

§ 59. INTERSECCION DE LAS SUPERFICIES CURVAS POR UNA RECTA

En la fig. 386 a la izquierda se muestra la intersección de una línea recta con cierta superficie cilíndrica. Esta superficie está dada por su traza sobre el plano H (la curva MN) y la dirección de la generatriz (la recta MT). Por la recta AB se ha trazado el plano proyectante frontal auxiliar S que corta a la superficie cilíndrica dada

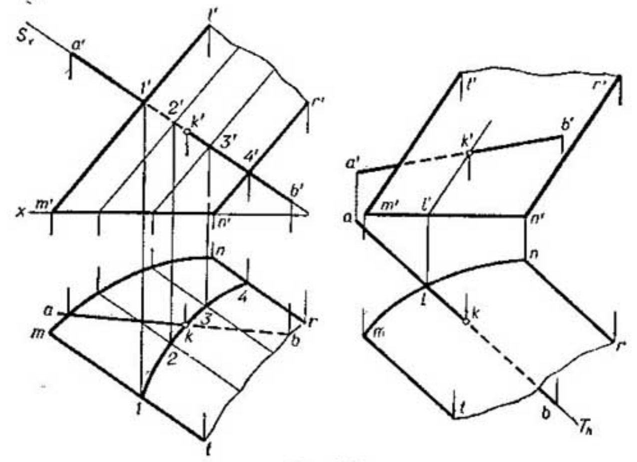


Fig. 386

según una curva, construida con ayuda de los puntos en los cuales las generatrices de la superficie cortan al plano S. En la intersección de la curva obtenida con la recta dada AB hallamos el punto K en el que la recta AB corta a la superficie cilíndrica.

Este procedimiento es general para la construcción de los puntos de intersección de una recta con una superficie cualquiera: *por la recta se debe trazar un plano auxiliar, hallar la línea de intersección de este plano con la superficie; el punto de intersección de la recta dada con la línea construida sobre la superficie será precisamente el punto de intersección de la recta con la superficie buscado.*

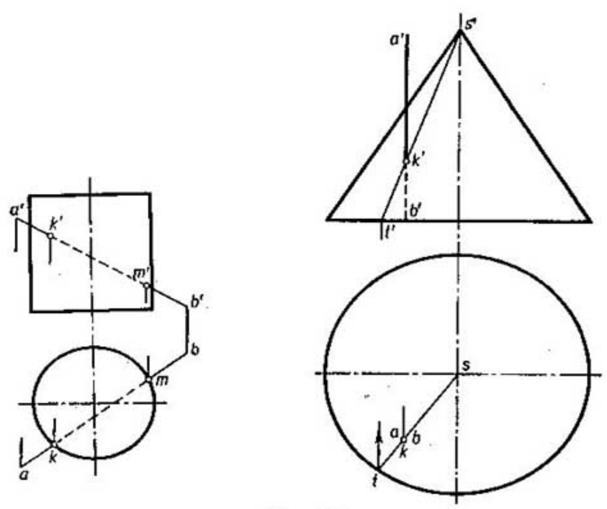


Fig. 387

Aquí se observa una analogía completa con la construcción del punto de intersección de una recta con un plano (véanse los §§ 22 y 25).

La construcción mostrada en la fig. 386 a la izquierda, claro está, se simplifica si (fig. 386, a la derecha) el plano auxiliar T es paralelo a la generatriz MT: la superficie resulta cortada según una recta paralela a MT y determinada por un solo punto L. Este es uno de los casos particulares posibles, a saber: la recta dada AB está situada en el plano paralelo a la generatriz MT.

A veces es innecesario mostrar el plano auxiliar. En la fig. 387 se dan algunos ejemplos: un cilindro circular recto cuyo eje es perpendicular al plano H, y un cono con la misma posición de su eje. La proyección horizontal del punto de intersección de la recta AB, perpendicular al plano H, con la superficie lateral del cono circular recto se confunde con la proyección horizontal de la pro-

pia recta. Trazando la proyección horizontal de la generatriz ST y construyendo su proyección frontal $s't'$, hallamos la proyección frontal k' del punto buscado.

El plano auxiliar trazado por una recta, al cortar ésta a una superficie cualquiera, debe ser elegido de tal modo que se obtengan las secciones más simples.

Por ejemplo, al cortar una superficie cónica con una recta, tal plano es el plano que pasa por el vértice y, por consiguiente, que corta

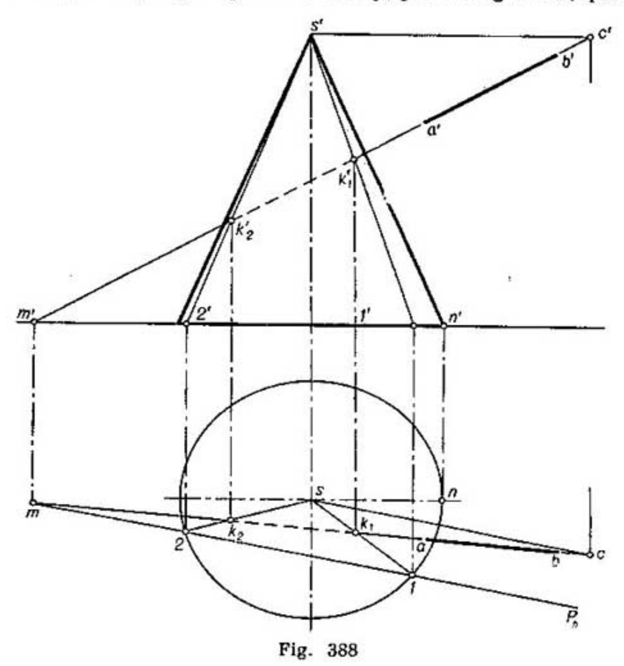


Fig. 388

a esta superficie según líneas rectas. Al cortar una superficie cilíndrica con una recta es conveniente trazar el plano auxiliar por la recta dada paralelamente a las generatrices de esta superficie; al cortar una superficie cilíndrica con un plano trazado de esta manera se obtienen líneas rectas.

En la fig. 388 se da el ejemplo con un cono, donde los puntos de intersección se han hallado con ayuda del plano P determinado por el vértice del cono y la recta dada.

Para construir las generatrices según las cuales el plano P corta al cono, es necesario hallar un punto más para cada generatriz, además del punto S. Estos puntos pueden ser hallados en la intersección de la traza del plano P, obtenida en el plano de la base del cono, con la circunferencia de esta base. En la fig. 388 el plano de la base del cono se ha tomado como plano de proyección H; por eso la traza del plano se ha designado por P_h. Para su construcción se ha tomado la recta auxiliar SC (la horizontal del plano P) y se ha hallado la traza

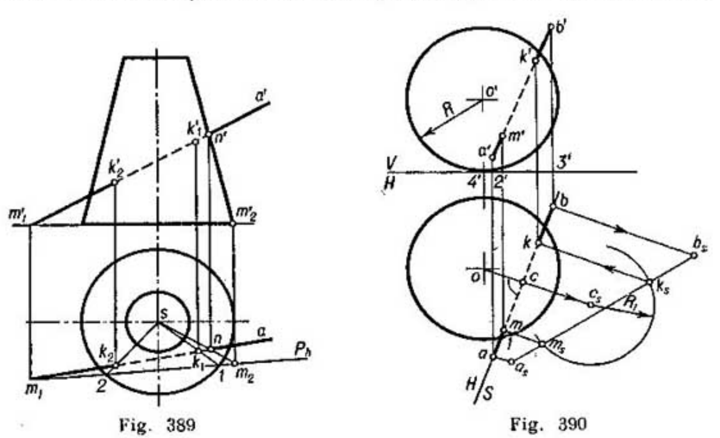


Fig. 389

Fig. 390

horizontal de la recta AB. La traza P_h pasa por el punto m paralelamente a la proyección sc. Por los puntos 1, $1'$ y 2, $2'$ pasarán las generatrices buscadas. Los puntos K_1 y K_2 son los puntos de entrada y de salida en la intersección de la recta AB con la superficie del cono.

Si viene dado un cono truncado (fig. 389) y no se puede construir la proyección frontal del vértice, entonces se puede tomar el punto n' como proyección frontal del punto de intersección de la recta dada AM_1 con cierta recta auxiliar que pasa por el vértice S; una vez hallada la proyección n, construimos la proyección horizontal de la recta auxiliar SM_2 (haciendo uso del punto s). Lo demás está claro del dibujo.

En la fig. 390 se muestra la construcción de los puntos K y M, en los que el segmento AB corta a la esfera de radio R. Se ha aplicado el método de cambio de los planos de proyección.

Ante todo, por AB se ha trazado el plano proyectante horizontal S (su traza en el plano H se confunde con la proyección ab). Este plano corta a la esfera según una circunferencia cuyo radio R_1 es

igual al segmento *c1*. Tomando este mismo plano S como plano de proyección auxiliar que forma con el plano H el sistema S, H, construimos la proyección $a_s b_s$ del segmento AB ($aa_s = a'2'$, $bb_s = b'3'$) y la proyección de la circunferencia según la cual el plano S corta a la esfera. La proyección del centro c_s la hallamos marcando $c_s c = o'4'$ y desde c_s como centro describimos un arco de radio R_1 de tal modo que se obtengan los puntos k_s y m_s (es innecesario trazar toda la circunferencia de radio R_1). Con ayuda de estos puntos hallamos primero las proyecciones k y m y con auxilio de estas últimas, las proyecciones k' y m'.

En la fig. 391 se da un ejemplo más de construcción de los puntos de intersección de una línea recta con una superficie que delimita cierto cuerpo de revolución. Además de dos planos, el cuerpo está delimitado por dos superficies cilíndricas de revolución y la parte de transición entre éstas (la superficie de un anillo circular). En el punto K_1 la recta corta a la superficie cilíndrica y luego corta en el punto K_2 a la superficie del anillo circular. Para construir las proyecciones de este punto se ha hallado la curva con las proyecciones *1—2—3*, *1'2'3'*, obtenida al cortar la superficie del anillo con el plano S trazado por la recta AB perpendicularmente al plano H. La curva se ha construido con ayuda de sus puntos haciendo uso de los paralelos; en el dibujo se muestran dos, señalados con los puntos M y N. A continuación la recta corta de nuevo a la superficie del anillo en el punto K_3 y sale fuera de los límites de la superficie por el punto K_4.

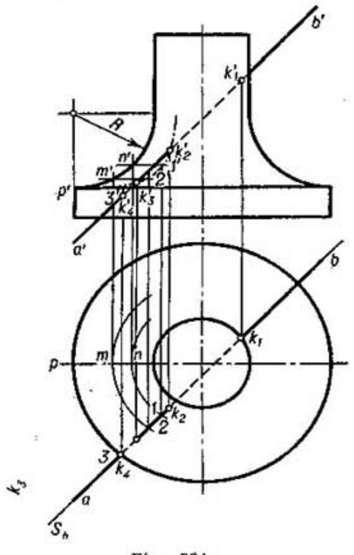


Fig. 391

Ahora prestemos atención en la construcción mostrada en la fig. 392. Aquí está representado un cilindro oblicuo con base circular. Para construir los puntos de intersección de la superficie del cilindro con la recta AB trazamos el plano P determinado, además de la recta AB, por la recta auxiliar BM_1 trazada por el punto B paralelamente a las generatrices del cilindro. Tal plano corta al cilindro según sus generatrices. Si se hallan las trazas horizontales de

las rectas que determinan al plano, entonces se puede trazar la traza horizontal del plano P. Señalando los puntos *1* y *2* en la intersección de la traza P_h con la base del cilindro (ésta está situada en el plano H), trazamos por estos puntos rectas paralelas a la proyección horizontal de la generatriz del cilindro y marcamos los puntos k_1 y k_2 (las proyecciones horizontales de los puntos de intersección de la recta AB con la superficie del cilindro). A continuación hallamos los puntos k_1' y k_2'.

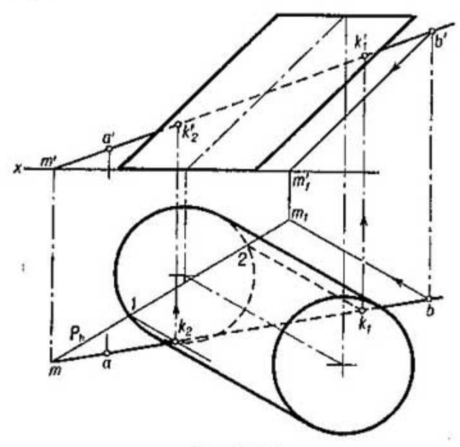


Fig. 392

Tal construcción se puede también representar como la proyección oblicua del cilindro y la recta AB sobre el plano H. La proyección se efectúa en dirección paralela a la generatriz del cilindro. El punto M de la recta AB está situado en el plano H; el punto M_1 es la proyección oblicua del punto B, construido sobre el plano H. La recta mm_1 es la proyección oblicua de la recta AB sobre el plano H. El cilindro tiene como proyección sobre este plano a su base. Lo demás está claro del dibujo.

Al resolver problemas de la intersección de superficies con una línea recta puede ocurrir que la recta dada no corta a la curva, que delimita a la figura obtenida al cortar la superficie dada con un plano trazado por la recta, sino que sólo hace contacto con ella. En este caso la recta es tangente a la superficie dada. En general, si se necesita determinar cómo está situada la recta respecto de la superficie, es necesario trazar por la recta un plano que corte a la superficie y examinar la posición recíproca de la recta y la figura obtenida en la intersección de la superficie con el plano.

En este parágrafo se ha examinado el problema de la construcción de los puntos que se obtienen al cortar una superficie curva con una recta. El procedimiento general es: 1) el trazado de un plano por la recta dada, 2) la construcción de la línea de intersección de la superficie con este plano, 3) la determinación de los puntos de intersección de la línea construida con la recta dada.

¿Cómo se debe proceder si cierta superficie debe ser cortada no con una recta, sino con una curva plana cualquiera? Evidentemente, el procedimiento expuesto es aplicable también en este caso, con la particularidad de que como plano trazado por la línea recta, sirve aquí el plano en el que está situada la propia curva plana.

PREGUNTAS A LOS §§ 58 Y 59

1. ¿Cuál línea se obtiene al cortar una esfera con un plano cualquiera y cuáles pueden ser las proyecciones de esta línea?
2. ¿En qué consiste el procedimiento de construcción de la sección producida en un toro por un plano?
3. ¿Cómo deben estar dirigidos los planos que cortan a un toro según circunferencias?
4. ¿Cómo se llaman las curvas obtenidas al cortar un toro con un plano paralelo al eje del toro? ¿En cuál caso estas curvas pasan a ser óvalos de Cassini y en cuál caso se obtiene la lemniscata de Bernoulli?
5. ¿Qué se comprende bajo el nombre de «curva de corte»?
6. ¿En qué consiste el procedimiento general de construcción de los puntos de intersección de una línea recta con una superficie curva?
7. ¿Cómo trazar el plano secante auxiliar al cortar un cono con una recta, de tal modo que en la superficie del cono se obtengan líneas rectas?
8. ¿Se puede emplear la proyección oblicua en el caso de intersección de un cilindro con una recta, si las generatrices del cilindro no son perpendiculares al plano de proyección?

X
CAPÍTULO

INTERSECCIÓN DE UNA SUPERFICIE POR OTRA, DE LAS CUALES POR LO MENOS UNA ES CURVA

§ 60. MÉTODO GENERAL DE CONSTRUCCIÓN DE LA LINEA DE INTERSECCIÓN DE UNA SUPERFICIE CON OTRA

El método general de construcción de la línea de intersección de una superficie con otra *es la determinación de los puntos de esta línea con ayuda de ciertos planos secantes* [1]. En la fig. 393 a la izquierda se muestra que las superficies *I* y *II* se han cortado con cierta superficie *III*; esta superficie auxiliar corta a la superficie *I* según la línea *AB*, y a la superficie *II*, según la línea *CD*. El punto *K*, en el que se cortan las líneas *AB* y *CD*, es común para las superficies *I* y *II* y, por lo tanto, pertenece a la línea de intersección de las mismas. Repitiendo este procedimiento obtenemos una serie de puntos de la línea buscada. Nosotros ya hicimos uso de este procedimiento al examinar (véase el § 24) la construcción de la línea de intersección de un plano con otro. Entonces el problema se reducía (fig. 166) al empleo de dos planos auxiliares. Cada uno de ellos permitía hallar un punto, común para ambos planos, la línea de intersección de los cuales era necesario hallar.

Aplicando el procedimiento general indicado para la construcción de la línea de intersección de dos superficies curvas podemos:

1) cortar las superficies con *planos* auxiliares;

2) cortar las superficies con *superficies curvas* auxiliares (por ejemplo, con esferas).

En algunos casos de resolución de problemas se combina el empleo de planos auxiliares y superficies curvas. Se debe, en lo posible,

---

[1] Para las líneas de intersección se usa también el nombre de «línea de transición,» sobre todo en aquellos casos en que en la transición de una superficie a otra no existe una intersección destacada. A las superficies secantes auxiliares se les suele llamar «intermediarios».

elegir tales superficies auxiliares que en la intersección con las superficies dadas dan líneas simples para la construcción (por ejemplo, rectas o circunferencias).

En el caso general, los planos secantes auxiliares se emplean también para la construcción de la línea de intersección de una superficie curva con otra de caras.

El procedimiento general indicado de construcción de las líneas de intersección de una superficie con otra no excluye el empleo de otro procedimiento, si por lo menos una de estas superficies es reglada: hallar el punto en el que la generatriz rectilínea de una superficie corta a la otra superficie y, repitiendo este artificio para una

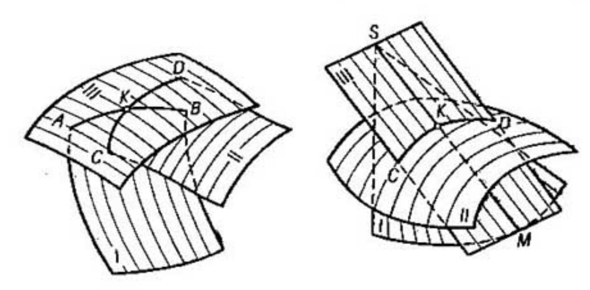


Fig. 393

serie de generatrices, trazar por los puntos hallados la línea buscada. En la fig. 393 a la derecha se muestra que por la generatriz SM de la superficie I se ha trazado el plano III que corta a la segunda superficie (II) según la curva CD; la generatriz SM corta a esta curva en el punto K por el que pasará la línea buscada de intersección de las superficies I y II.

Esto se refiere también al caso de intersección de una superficie curva por una superficie de caras: aquí como generatrices sirven las aristas de la superficie de caras.

Así pues, para construir los puntos de la línea que se obtiene en una superficie al cortarla con otra superficie se emplean planos secantes auxiliares de posición particular y general, superficies curvas, generatrices rectilíneas de superficies curvas regladas y las aristas de las superficies de caras. Además, se recurre a los procedimientos de transformación del dibujo, si esto simplifica y aclara la construcción.

En los ejemplos dados en la exposición ulterior, principalmente se examinan cuerpos geométricos, es decir, porciones limitadas de espacio con el conjunto de líneas que las delimitan (superficies). De dos superficies solamente una corta a la otra. Por eso una de las

superficies se conserva, y en la otra, en la cortada, surgen orificios. Aquí pueden surgir los casos siguientes: 1) *penetración*, con la particularidad de que se obtienen o bien dos líneas independientes (véase, por ejemplo, la fig. 412, donde el cono con eje horizontal penetra en otro cono), o una sola línea con punto nodal (fig. 427); 2) *mordedura*, cuando se obtiene una línea (véase, por ejemplo, las figs. 396 y 426).

En las piezas fundidas las líneas de transición son por lo general suaves, es decir, el paso de una superficie a otra tiene lugar por una superficie intermedia, por ejemplo, por un toro. En este caso para designar la transición se construye la línea de intersección de las formas geométricas que sirven como base para las formas técnicas (véase, por ejemplo, las figs. 399 y 430) [1].

Las proyecciones de la línea de intersección se obtienen dentro de los límites de la parte común de las proyecciones de ambas superficies.

Para construir los puntos de la línea de intersección, primero se deben hallar los puntos llamados corrientemente *característicos* [2]. Estos son los puntos, cuyas proyecciones separan la parte vista de la proyección de la línea de intersección de la oculta, son las proyecciones de los puntos de la línea de intersección, más altos y más bajos respecto del plano H, más cercanos y más lejanos con relación al observador, los puntos extremos a la derecha y a la izquierda en las proyecciones de la línea de intersección.

§ 61. ELECCIÓN DE LOS PLANOS SECANTES AUXILIARES EN LOS CASOS CUANDO ÉSTOS PUEDEN CORTAR A AMBAS SUPERFICIES SEGÚN LÍNEAS RECTAS

Cuando ambas superficies son cilíndricas o cónicas, o en el caso en que una de ellas es cilíndrica y la otra cónica, a veces, los planos auxiliares deben elegirse de tal manera que corten a ambas superficies según líneas rectas (según las generatrices de estas superficies). El punto de intersección de la generatriz de una superficie con la generatriz de la otra pertenece a la línea de intersección.

En la fig. 394 se da un ejemplo de la elección de los planos secantes para los casos de intersección de un cilindro por otro. Como «patrón» para estas superficies sirve el plano P, «el plano de paralelismo», determinado por dos rectas que se cortan LM y LN, paralelas respectivamente a las generatrices de los cilindros. Este plano

---

[1] En semejantes casos, es decir, cuando se considera un cuerpo monolítico, es más exacto hablar de la línea de unión de las superficies.

[2] Se les suele llamar también «de apoyo».

es de posición general; por consiguiente, en este caso, los planos secantes auxiliares son también de posición general. Basta prefijar las trazas horizontales de estos planos, trazándolas paralelamente a la traza P_h: las direcciones de las rectas, según las cuales estos planos

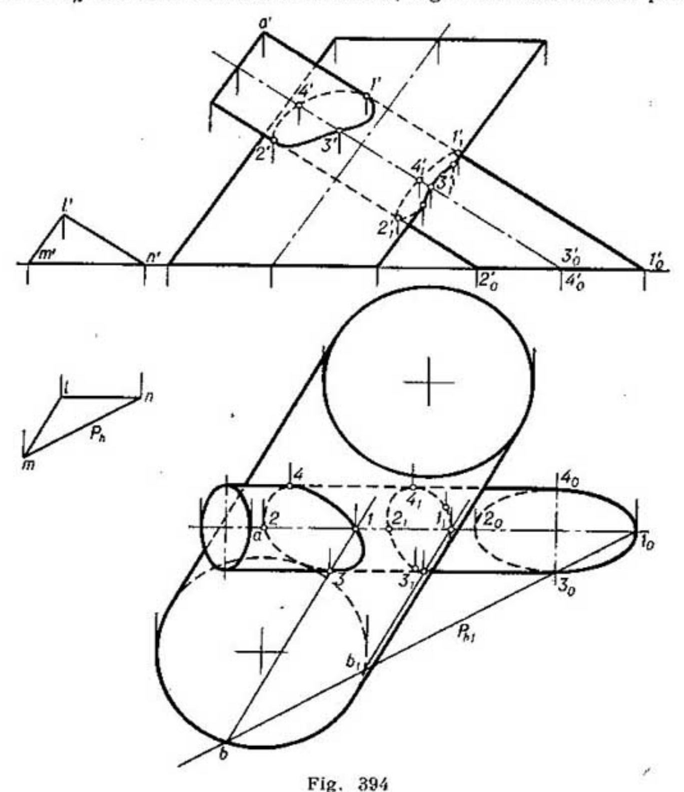


Fig. 394

cortan a ambos cilindros, son conocidas, son paralelas a las generatrices de los cilindros. Por ejemplo, la traza $P_{1h} \| P_h$ corta en dos puntos a cada una de las líneas directrices de los cilindros dados, lo que ofrece la posibilidad de determinar sus generatrices. Estas generatrices se cortan en cuatro puntos pertenecientes a la línea de intersección buscada. La construcción se ha efectuado suponiendo que

uno de los cilindros penetra en el otro, formando en la superficie de este último dos orificios.

Evidentemente, en semejante construcción se puede elegir una u otra generatriz de uno de los cilindros, trazar la traza del plano secante por la traza de esta generatriz, como se ha hecho con la traza P_{1h}, y analizar si da este plano los puntos de intersección con las generatrices del otro cilindro, obtenidas con ayuda del mismo plano.

Análogamente se construye el patrón de planos secantes auxiliares en los casos de intersección de un cilindro por un prisma y viceversa.

En la fig. 395 se ha efectuado la construcción de las líneas de intersección de la superficie de un cilindro por una pirámide. Para la elección de los planos que corten según líneas rectas no sólo a las caras de la pirámide, sino también a la superficie cilíndrica según las generatrices, se ha trazado la recta SM paralela a la generatriz de esta superficie y que pasa por el vértice de la pirámide. Obviamente, si en vez de la pirámide tomamos un cono, se debe proceder del mismo modo: trazar una recta por el vértice del cono paralelamente a la generatriz de la superficie cilíndrica. Las trazas horizontales de los planos secantes auxiliares deberán pasar por el punto m, lo que corresponderá al trazado de los planos por la recta SM. Las trazas horizontales de los planos cortan a las trazas horizontales de las superficies laterales del cilindro y de la pirámide en los puntos por los que pasan las proyecciones horizontales de las líneas de intersección de los planos auxiliares con las superficies dadas. Por ejemplo, la traza T_h corta a las proyecciones horizontales de los lados de la base de la pirámide en los puntos d y e, lo que corresponde a la intersección de las caras SBC y SAC por el plano T según las rectas SD y SE. Pero el mismo plano T corta a la superficie cilíndrica según la generatriz con el punto inicial 7, $7'$. En la intersección de esta generatriz con las rectas SD y SE se obtienen los puntos 8, $8'$ y 9, $9'$, pertenecientes a la línea de intersección. Esta línea se encuentra en la superficie cilíndrica, puesto que en el caso dado la pirámide penetra en el cilindro, saliendo de éste por la base superior, en la que se obtiene un orificio triangular.

Las curvas en la superficie cilíndrica dada son arcos de elipses, puesto que representan las líneas de intersección de esta superficie por planos (las caras de la pirámide). La construcción debe iniciarse con la determinación de los puntos de intersección de las aristas de la pirámide con el cilindro.

En la fig. 396 se ha construido la línea de intersección, que se forma en la superficie del cono (con el vértice S) en el caso de mordedura de éste por el cono de vértice T.

Para hallar los puntos de la línea de intersección se han empleado planos de posición general, cada uno de los cuales debe pasar por los vértices de ambos conos.

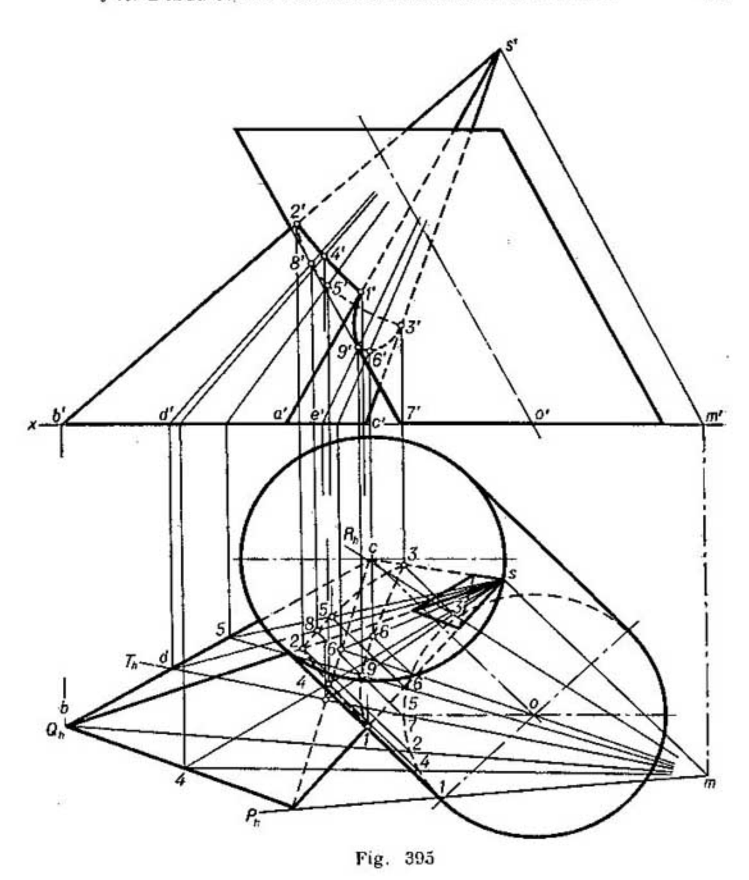


Fig. 395

Previamente se ha trazado una recta por los vértices S y T. Los planos que pasan por la recta ST cortan a las superficies cónicas según sus generatrices.

Estos planos forman un haz, como eje del cual sirve la recta ST. Una vez construida la traza horizontal de esta recta, obtenemos el punto m, por el que deben pasar las trazas horizontales de los planos requeridos, por ejemplo, la traza P_h. Intersecando la circunferencia

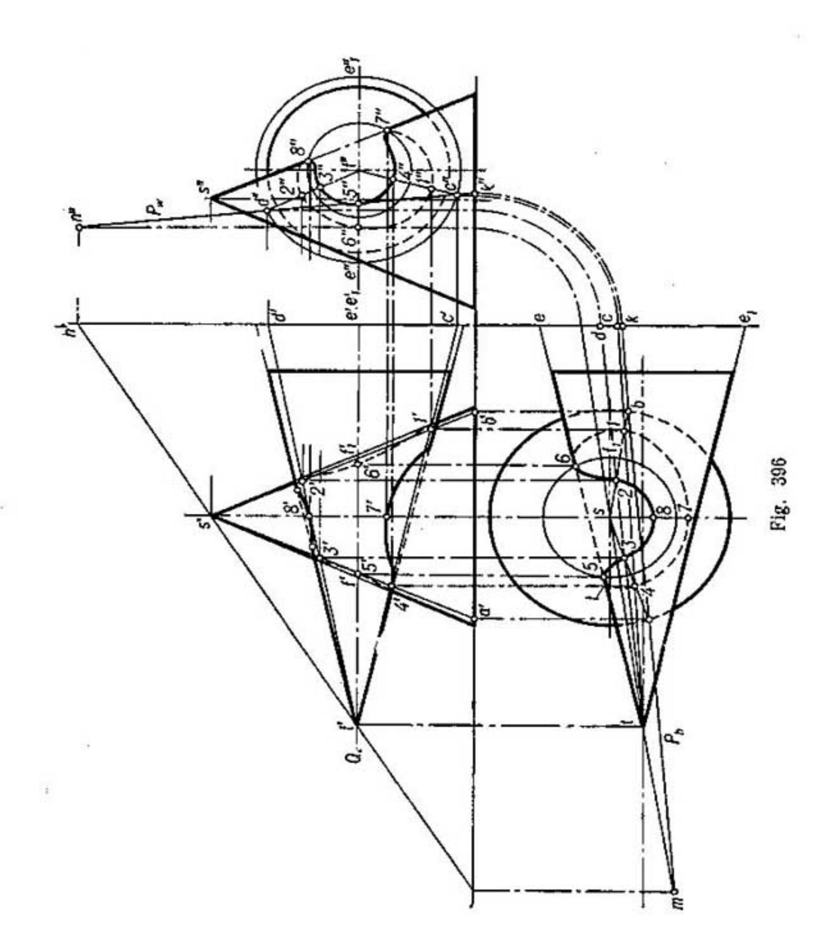


Fig. 396

de la base del cono de vértice S, la traza P_h da los puntos a y b, con ayuda de los cuales se pueden hallar las proyecciones horizontales de las generatrices SA y SB sobre la superficie de este cono. Luego hallamos las proyecciones frontales de las generatrices indicadas ($s'a'$ y $s'b'$).

Ya vimos un procedimiento semejante en la fig. 282, donde se examinaba la intersección de una pirámide por otra.

Pero la traza horizontal P_h no permite en este caso determinar las generatrices del cono de vértice T, sutiadas en el plano P; por eso hallamos la traza de perfil P_w que corta a la línea de intersección de la superficie cónica con el plano W en los puntos c'' y d''. Una vez construidas las proyecciones horizontales y frontales de los puntos C y D, construimos las generatrices del cono de vértice T: CT y DT ($c't'$, ct y $d't'$, dt). Las generatrices halladas se cortan en los puntos pertenecientes a la línea buscada.

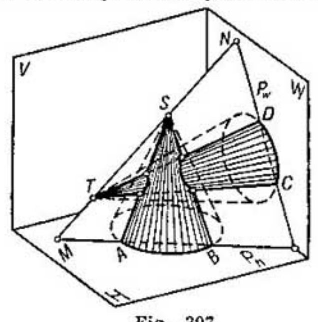


Fig. 397

Trazando una serie de planos auxiliares por ST, se puede construir una serie de puntos de la línea buscada de intersección y trazar por ellos una curva.

Confrontando las construcciones en la fig. 396 y las construcciones de las figs. 394 y 395 vemos que en estas últimas fueron suficientes las trazas horizontales de los planos, mientras que en el caso de la fig. 396 fueron necesarias las trazas de perfil. Esto se explica por hecho de que las bases de los cuerpos examinados en las figs. 394 y 395 están situadas en el plano H, mientras que en la fig. 396 solamente uno de los conos se apoya sobre el plano H. Por esta razón, cuando las bases de los cuerpos están situadas en distintos planos de proyección (fig. 397), nos vemos obligados a emplear las trazas correspondientes de los planos secantes. Si, por ejemplo, como en la fig. 396, la superficie de uno de los conos no llega hasta el plano de proyección, entonces ésta se lleva hasta este plano, o sea, se construye la traza de la superficie.

El trazado de los planos secantes por una recta que pasa por los vértices de los conos, evidentemente, es útil también para el caso de la intersección de la superficie de un cono por una pirámide.

En la fig. 396 se muestra el empleo de no sólo planos de posición general, por ejemplo, el plano P, sino también planos de posición particular para hallar ciertos puntos. Así, el plano trazado por el punto T paralelamente al plano H (la traza Q_v) corta al cono según las generatrices TE y TE_1, y al cono de vértice S, según la circunfe-

rencia FF_1. En la intersección de su proyección horizontal con el hallamos las proyecciones horizontales *5* y *6*, y luego las proyecciones *5'*, *6'* y *5"*, *6"*. Trazando por *S* un plano de perfil hallamos los puntos con las proyecciones *7*, *7'*, *7"* y *8*, *8'*, *8"*.

§ 62. APLICACION DE LOS PLANOS SECANTES AUXILIARES PARALELOS A LOS PLANOS DE PROYECCION

En el párrafo anterior, en la fig. 396 se mostró la aplicación de planos secantes auxiliares: uno, paralelo al plano *H* y otro, paralelo al plano *W*. Pero allí el papel principal como planos auxiliares de posición general lo desempeñaba el haz de planos con la recta común *ST*. Ahora examinaremos ejemplos, cuando el empleo de solamente planos paralelos a los planos de proyección, resuelve por completo el problema de determinación de los puntos para la curva buscada. Esto ocurre en los casos en que estos planos cortan a las superficies, que participan en la construcción, según rectas o circunferencias.

En la fig. 398, un cono truncado, cuyo eje es perpendicular al plano *W*, penetra en una semiesfera, en la superficie de la cual se forma una curva cerrada. En este caso los puntos de la línea de intersección se han hallado con ayuda de planos paralelos al plano *W* y perpendiculares al eje del cono. Los planos *P* y P_1 cortan a la superficie de la semiesfera según circunferencias de radios $o'a'$ y $o_1'a_1'$, y a la superficie del cono, según circunferencias de radios $c''b''$ y $c''b_1''$. Construyendo las circunferencias indicadas sobre el plano *W*, hallamos las proyecciones de perfil de los puntos de la línea buscada. Así pues, en la intersección de las circunferencias, obtenidas con ayuda del plano *P*, marcamos los puntos *1"* y *2"*; las proyecciones frontales y horizontales de estos puntos se encuentran en las trazas P_h y P_v. De modo semejante se han hallado los puntos *3*, *3'* y *4*, *4'* con auxilio del plano P_1.

Dado que el eje del cono es paralelo al plano *H*, entonces, trazando por él el plano *Q* paralelo al plano *H*, cortaremos a la superficie del cono según generatrices, y a la superficie de la semiesfera, según una circunferencia; construyendo la proyección de esta última sobre el plano *H*, hallaremos en la intersección con las proyecciones de las generatrices correspondientes del cono los puntos *5* y *6*.

En este ejemplo, la posición de los puntos *7*, *7'* y *8*, *8'* es evidente. Estos puntos, así como los *5*, *5'* y *6*, *6'* son puntos característicos; en forma ampliada se muestra la construcción del punto *6*, en el que hacen contacto una con otra las proyecciones de la generatriz del cono y de la línea de intersección.

En la fig. 399 se da otro ejemplo, cuando los puntos de la línea de intersección de dos superficies de han hallado con la ayuda de planos secantes paralelos al plano H, y en un caso (el punto B) al plano W. Aquí es más oportuno hablar de la línea de transición

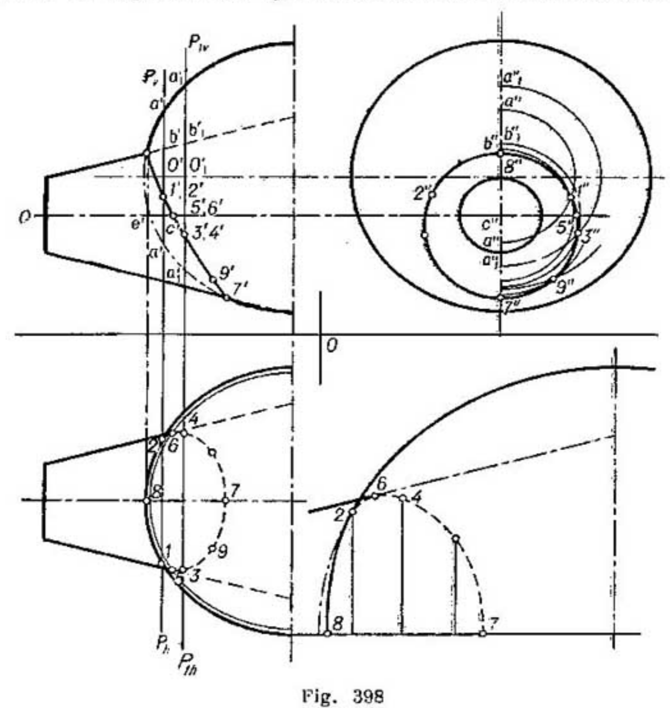


Fig. 398

(véase la nota de la pág. 274), puesto que la pieza representada [1] (casquete de cojinete) se obtiene por fundición y allí donde la superficie cónica se junta con la esférica, no se obtiene una línea de intersección claramente destacada. Pero en la fig. 399 se ha efectuado la construcción precisamente de la línea de intersección, puesto que se examinan formas geométricas que son las bases de las formas técnicas.

[1] Para economizar lugar, la vista principal y la vista superior se dan no completas.

La marcha de la construcción está clara del dibujo. Para construir las proyecciones del punto B, que tiene importancia para determinar la transición entre las proyecciones de la generatriz del cono y la línea de intersección sobre el plano W (el punto b'') se ha tomado

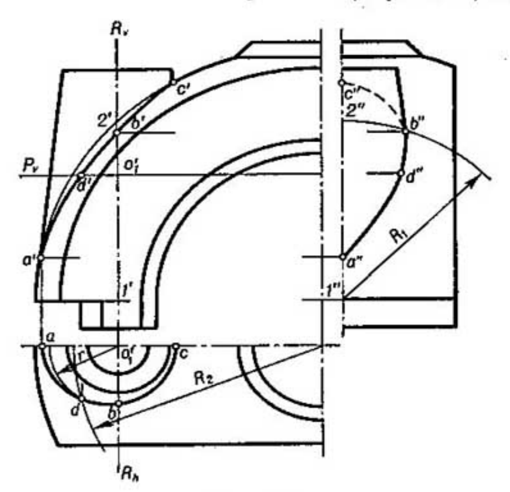


Fig. 399

el plano de perfil que pasa por el eje del cono. La superficie esférica se corta según una circunferencia de radio $R_1 = 1'2'$. Primero se ha hallado la proyección b'', luego b' y b. El punto B, así como los puntos A y C, es también característico [1].

PREGUNTAS A LOS §§ 60—62

1. ¿En qué consiste el método general de construcción de la línea de intersección de una superficie por otra?
2. ¿Es posible, si por lo menos una de las superficies curvas que se cortan es reglada, construir la línea de intersección con ayuda de los puntos de intersección de las generatrices de esta superficie reglada con la otra?
3. ¿En qué se diferencian la «penetración» y la «mordedura» al intersecar una superficie con otra?
4. ¿Dentro de los límites de cuál parte de las proyecciones de las superficies que se cortan se obtiene la proyección de la línea de intersección?

---

[1] Acerca de las proyecciones de la línea de intersección de una superficie esférica con una cónica véase el § 65.

5. ¿Cuáles puntos de la línea de intersección de las superficies se llaman «característicos»?

6. ¿Cuáles recomendaciones se pueden dar para la elección de los planos secantes auxiliares en los casos de intersección de cilindros, conos, prismas y pirámides?

7. ¿En cuáles casos se recomienda emplear planos secantes auxiliares paralelos a los planos de proyección para construir la línea de intersección de una superficie por otra?

§ 63. ALGUNOS CASOS PARTICULARES DE INTERSECCION DE UNA SUPERFICIE CON OTRA

1. En la fig. 400 están representados cuerpos que se cortan: a) dos cilindros con generatrices paralelas, b) dos conos con vértice común. En ambos casos las líneas de intersección de las superficies son las generatrices comunes de estas superficies.

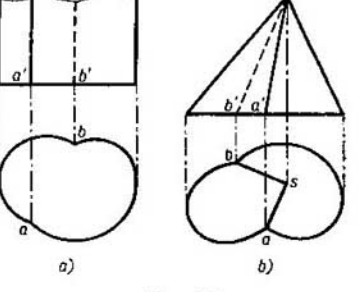


Fig. 400

Supongamos que hace falta construir las proyecciones de la recta que pasa por el punto B del eje de proyección y que forma con el plano H un ángulo α y con el plano V un ángulo β. Es conocido que para una recta de posición general $\alpha+\beta<90°$ (véase el § 13).

El lugar geométrico de las rectas que pasan por el punto dado y que forman con el plano H un ángulo α, es una superficie de revolución cónica cuyo vértice se encuentra en el punto dado y sus generatrices forman con el plano H un ángulo α.

Igualmente, el lugar geométrico de las rectas que pasan por el punto dado y que forman con el plano V un ángulo β, es una superficie de revolución cónica cuyo vértice se encuentra en el punto dado y sus generatrices forman con el plano V un ángulo β.

Obviamente, la recta buscada debe pertenecer al mismo tiempo a las superficies de ambos conos que tienen un vértice común en el punto dado, es decir, debe ser la línea de su intersección (la generatriz común). Obtendremos ocho rayos que parten del punto B y que responden a las condiciones planteadas (cuatro rectas).

En la fig. 401 se ha efectuado la construcción de uno de estos rayos. El primer cono se determina por la generatriz BA_1 y el eje perpendicular al plano H, y el segundo cono, por la generatriz BA_2 y el eje perpendicular al plano V. Para la construcción de la recta buscada se tiene por ahora solamente el punto B (el vértice común de los conos). El segundo punto (el punto K), común para las superficies de estos conos, lo hallamos con la ayuda de la esfera con céntro en el punto B (véase más adelante la fig. 415).

De otro ejemplo, cuando en el curso de la construcción se emplea la propiedad de la intersección de dos superficies cónicas con vértice común según una recta común para estas superficies (generatriz), sirve la construcción de las gene-

ratrices de una superficie reglada llamada cilindro con tres directrices (sobre esta superficie véase en el § 50, el apartado B, punto 2.2). Supongamos (fig. 402) que entre las directrices hay una recta AB y dos curvas. Si tomamos el punto (K) sobre la generatriz rectilínea y lo aceptamos como vértice común de las superficies cónicas auxiliares para las cuales las curvas dadas sirven de directrices, entonces la recta de intersección de estas superficies cónicas, pasando por el vértice de las mismas, corta también a sus directrices, es decir, es la generatriz rectilínea del cilindro con tres directrices. Evidentemente, hay que tomar una serie de puntos de la recta dada y efectuar para cada uno de ellos la construcción indicada, lo que da una serie de generatrices del cilindro con tres directrices.

Si las tres directrices de esta superficie son líneas curvas, entonces el método de construcción indicado se conserva el mismo: los puntos, que sirven de vértices de las superficies cónicas auxiliares, se toman sobre una de las curvas dadas.

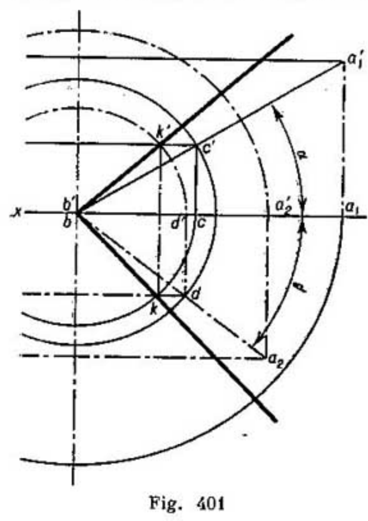


Fig. 401

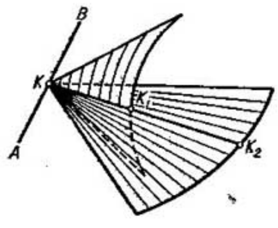


Fig. 402

2. En el caso de intersección mutua de superficies de revolución de segundo orden, en ciertos casos, la línea de intersección se descompone en dos curvas planas de segundo orden. Esto ocurre en los casos cuando ambas superficies de revolución que se cortan (cilindro y cono, dos conos, elipsoide y cono, etc.) están circunscritas a una esfera común para ellas. En los ejemplos dados en la fig. 403, en los tres primeros casos la intersección tiene lugar según elipses, en el cuarto, según una elipse y una parábola, y en el quinto, según una elipse y una hipérbola.

En la fig. 404 se muestran dos cilindros de igual diámetro con ejes que se cortan. Desde el punto de intersección de los ejes se puede trazar una esfera inscrita en ambos cilindros. Ambas superficies se cortan según una línea compuesta por dos elipses. En la fig. 404 a la derecha, están representados también dos cilindros de igual diámetro, pero, en este caso, sus ejes se cortan no bajo un ángulo recto.

La línea de intersección está compuesta por las mitades de dos elipses.

Las curvas de intersección de las superficies representadas en las figs. 403 y 404 se proyectan sobre el plano frontal de proyección en forma de segmentos rectilíneos, puesto que el plano común de simetría para cada par de superficies examinadas está situado paralelamente al plano V.

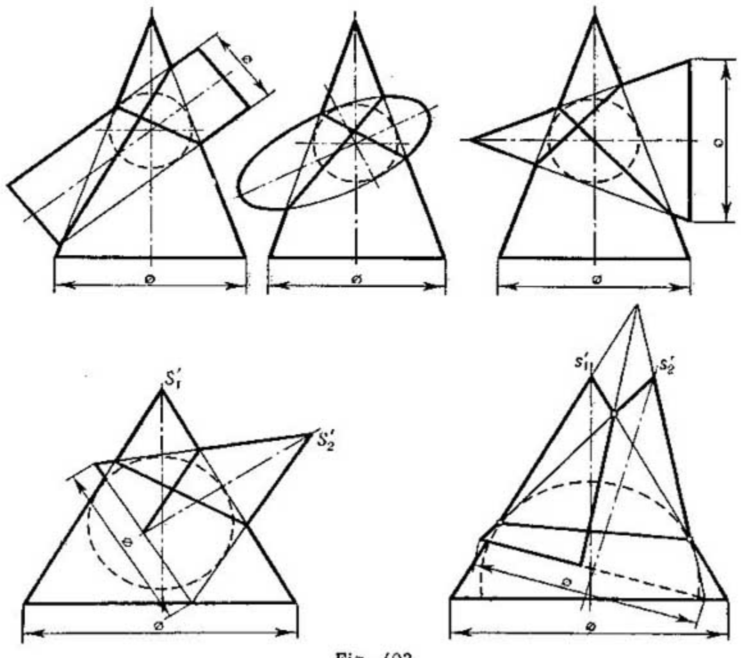


Fig. 403

En los ejemplos examinados tiene lugar un *contacto doble* de las dos superficies de segundo orden que se cortan, es decir, la existencia en estas superficies de dos puntos de contacto y, por lo tanto, dos planos, cada uno de los cuales hace contacto con ambas superficies en un punto común para éstas. Expongamos, sin demostración[1], las dos tesis siguientes, en las cuales se basan las construcciones indicadas más arriba: 1) *las superficies de segundo orden, que tienen doble contacto, se cortan entre sí según dos curvas de segundo orden, con la particularidad de que los planos de estas curvas pasan por la recta determinada por los puntos de contacto*;

[1] Véase en los cursos de Geometría Analítica.

2) *dos superficies de segundo orden circunscritas a una tercera superficie de segundo orden (o inscritas en esta última*[1]*), se cortan entre sí según dos curvas de segundo orden.* La segunda tesis, conocida bajo el nombre de *teorema de Monge*, se desprende de la primera.

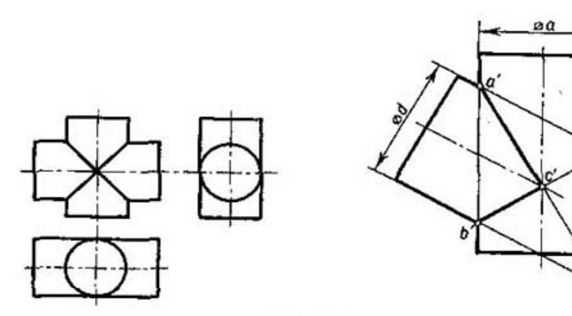


Fig. 404

Sobre la base de lo expuesto se pueden hallar las secciones circulares de un cono elíptico y de un cilindro elíptico (véase la pág. 200). En la fig. 405 se da un ejemplo. Se ha tomado cierta esfera de tal modo que tenga doble contacto con la superficie del cono elíptico. En la intersección de la esfera con el cono se obtienen dos curvas planas: dos circunferencias en los planos proyectantes de perfil T y Q (se muestran las trazas de perfil de estos planos). Los planos paralelos a los planos T y Q dados sistemas de secciones circulares del cono elíptico.

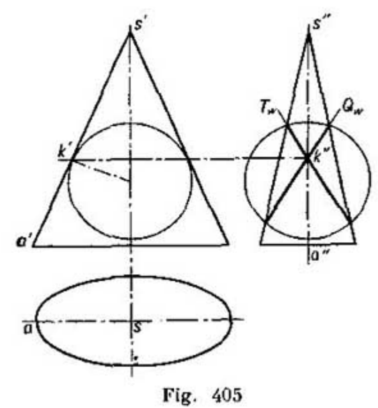


Fig. 405

3. Las superficies de revolución coaxiales (o sea, las superficies con eje común) se cortan según circunferencias. En la fig. 406 se dan tres ejemplos: a) un cilindro y un cono, b) un elipsoide achatado y un cono truncado, c) dos esferas. En todos estos ejemplos se dan solamente las proyecciones frontales, además, el eje común de las superficies está situado paralelamente al plano V. Por esta razón, las circunferencias que se obtienen en la intersección de una superficie con

1) Por ejemplo, dos elipsoides de revolución achatados inscritos en una superficie esférica.

otra se proyectan sobre el plano *V* en forma de segmentos rectilíneos.

Como eje de la esfera se puede tomar cualquiera de sus diámetros. Por eso, las esferas que se cortan se consideran superficies de revolución coaxiales. Como superficies coaxiales también pueden ser con-

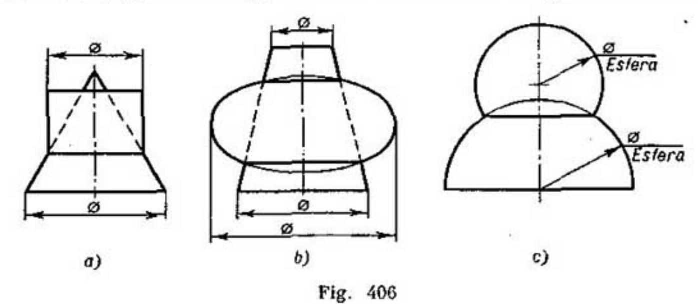


Fig. 406

sideradas el cilindro y la esfera, el cono y la esfera, cierta superficie de revolución y la esfera, representadas en la fig. 407. Los ejes del cilindro, del cono y de la superficie de revolución pasan por los centros de las esferas. La intersección tiene efecto según circunferencias.

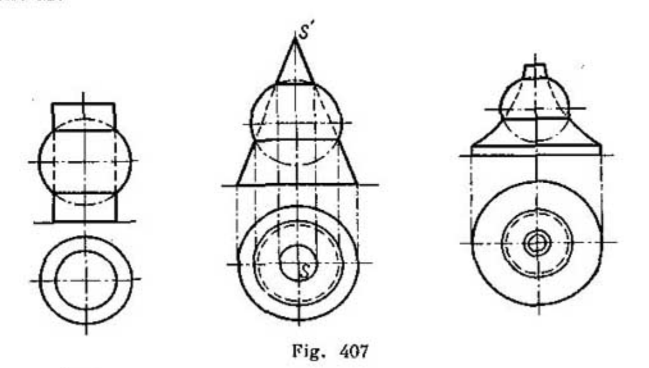


Fig. 407

En la fig. 408 se dan ejemplos de la representación de superficies de revolución coaxiales y de los taladrados en dirección contraria de un mismo diámetro tomados de la práctica del dibujo de máquinas. Las superficies se han designado con las letras siguientes: *A*,

la superficie de un anillo circular; *C*, la de un cono; *Cil*, la de un cilindro; *Es*, la de una esfera; las líneas obtenidas en la intersección se han designado con las letras: *Cir*, circunferencia; *El*, elipse. Estas

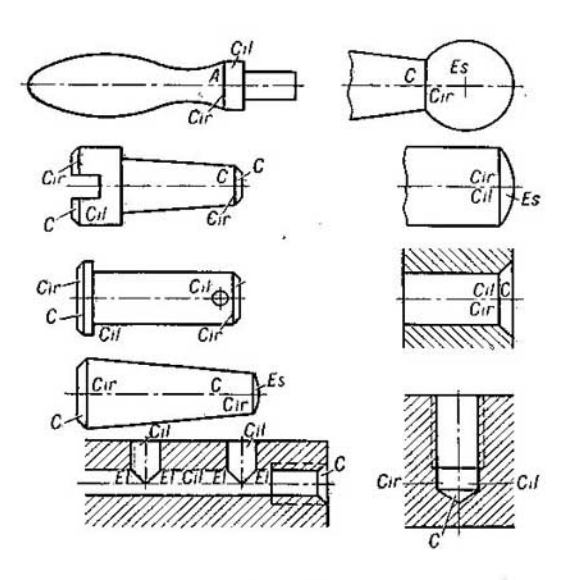


Fig. 408

líneas se proyectan en forma de segmentos rectilíneos, puesto que los ejes de las superficies son paralelos a los planos de proyección (en este caso al plano *V*).

§ 64. APLICACION DE LAS ESFERAS SECANTES AUXILIARES

La intersección de superficies de revolución con una esfera examinada en el § 63 es la base del empleo de las esferas en calidad de superficies auxiliares al construir las líneas de intersección de una superficie por otra.

En la fig. 409 se dan dos superficies de revolución con ejes que se cortan y, por consiguiente, con plano común de simetría paralelo al plano *V*. Desde el punto de intersección de los ejes se puede trazar una serie de esferas. Supongamos que se ha trazado la esfera designada

en la fig. 409 por *Es.1*. Esta esfera se corta con cada una de las superficies según circunferencias; en la intersección de las circunferencias se obtienen puntos, comunes para ambas superficies y, por lo tanto, pertenecientes a la línea de intersección. Como se ve del dibujo, la construcción se simplifica considerablemente como consecuencia de que el plano de simetría, común para las superficies dadas, es paralelo al plano de proyección (en el caso dado al plano V): las circunferencias según las cuales la esfera corta simultáneamente a dos superficies, se proyectan sobre el plano V en forma de segmentos rectilíneos. Además, la proyección de la línea de intersección se construye sin la ayuda de otras proyecciones de las superficies.

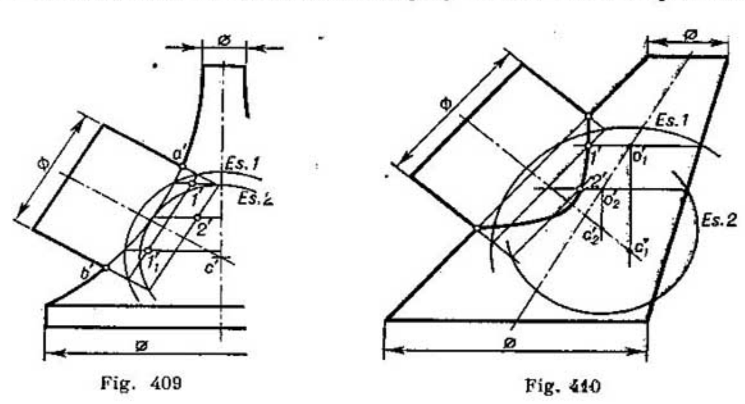


Fig. 409 Fig. 410

Claro está, que se trazan varias esferas, para obtener un número suficiente de puntos para trazar la proyección buscada de la línea de intersección. En la fig. 409 se muestra una esfera más, la *Es.2*; ésta sólo hace contacto con la superficie de generatriz curvilínea y da en la proyección que se examina el punto $2'$, «el último» para la proyección frontal: las esferas de menor diámetro no dan puntos para la línea buscada.

Ahora queda trazar por los puntos a', $1'$, $2'$, $1'_1$ y b' una curva: la proyección frontal de la línea de unión de ambas superficies (examinándolas como un todo).

Como se ve, toda la construcción se ha efectuado solamente en una proyección.

Así pues, si hay que construir la línea de intersección de dos superficies de revolución, cuyos ejes se cortan, se puede emplear esferas secantes auxiliares con centro en el punto de intersección de los ejes de las superficies.

En la fig. 410 se da otro ejemplo del empleo de esferas en la construcción, análoga a la mostrada en la fig. 409. Esta vez, solamente una de ellas es superficie de revolución, la otra es un cono circular oblicuo (véase el § 50); éste tiene una serie de secciones circulares paralelas entre sí. Cada una de estas secciones puede ser considerada como paralelo de la esfera, cuyo centro se toma sobre el eje de la superficie del cilindro. Por ejemplo, tomando el paralelo con centro O_1 (cuya proyección es o_1'), trazamos por O_1 una perpendicular al plano del paralelo hasta su intersección con el eje del cilindro. El punto C_1 (su proyección es c_1') se toma como centro de la esfera que corta a cada una de las superficies según circunferencias: a la superficie del cono según el paralelo tomado con centro O_1, a la superficie del cilindro según la circunferencia que se obtiene al «acercarla» a la esfera. Como resultado, sobre la proyección que se examina (la frontal) se obtiene el punto $1'$ perteneciente a la proyección de la línea de intersección buscada. Análogamente puede ser hallado el centro C_2 (con la proyección c_2') para trazar la esfera con ayuda del paralelo elegido con centro en el punto O_2 (con la proyección o_2'). Lo que sigue está claro del dibujo.

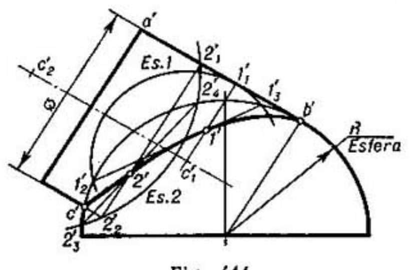


Fig. 411

Así pues, *las esferas auxiliares pueden emplearse también en los casos de intersección de una superficie de revolución con una superficie que tiene secciones circulares paralelas entre sí, cuyos centros están situados sobre una misma línea que corta al eje de la superficie de revolución.*

En la fig. 411 se muestra la construcción de la línea de unión de la superficie de un cilindro de revolución y una esfera (la generatriz AB del cilindro hace contacto con la esfera en el punto B). Estas superficies tienen un plano de simetría común paralelo al plano V. El centro de una esfera auxiliar la *Es.1*, se ha tomado en el punto cuya proyección frontal es c_1'. El radio de esta esfera se ha tomado igual al segmento $c_1'1_1'$ (en el caso dado es el radio menor para las esferas auxiliares); ésto es también el radio de la circunferencia por la que tiene efecto el contacto de la esfera auxiliar *Es.1* con la superficie del cilindro. Esta esfera corta a la esfera dada de radio R según la circunferencia de radio $1_2'1_3'$. En la intersección de las rectas $1_2'1_3'$ y $c_1'1_1'$ se obtiene el punto $1'$ (uno de los puntos pertenecientes a la proyección de la línea buscada de unión de las superficies del cilindro y la esfera).

La segunda esfera auxiliar (la *Es,2*) se ha trazado desde el punto tomado también sobre el eje del cilindro (con la proyección c_2'). Esta esfera da el punto *2'*.

Al obtener unos cuantos puntos más entre los puntos extremos *b'* y *c'*, se puede trazar la proyección frontal de la línea buscada. En el punto *1'*, obtenido con ayuda de la esfera «extrema» (inscrita en el cilindro), la recta $1_2'1_3'$ es tangente a la curva *b'1'2'c'*.

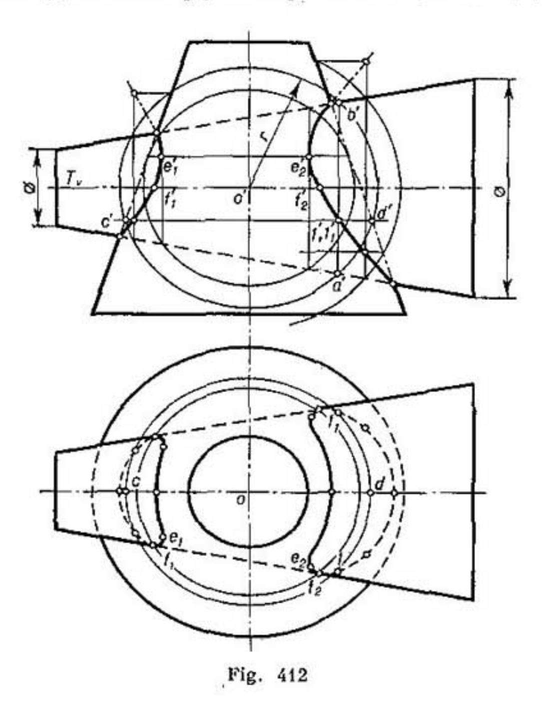
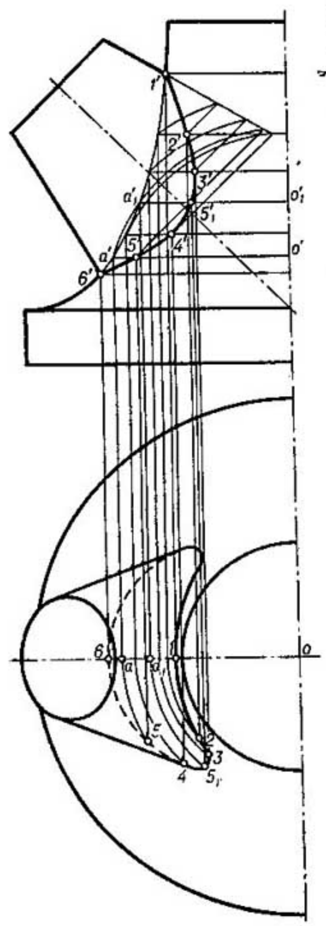


Fig. 412

En la fig. 412 se muestra la intersección de dos conos de revolución. Sus ejes forman en su intersección un plano de simetría, común para estos conos, paralelo al plano *V*.

En el caso en cuestión se han empleado esferas auxiliares trazadas desde un mismo centro (el punto *O* de intersección de los ejes de los conos). Así, para hallar el punto *1* se ha trazado la esfera de radio *r*.



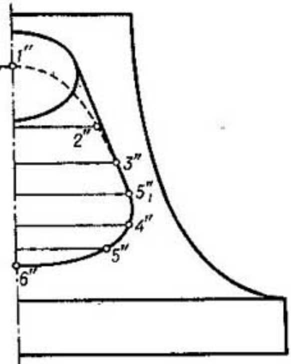


Fig. 413

Los puntos e_1' y e_2' en la proyección frontal, los puntos más próximos al eje del cono con eje vertical, se han hallado con la ayuda de la esfera inscrita en este cono [1].

Los puntos f_1 y f_2, en los que tiene lugar en la proyección horizontal la división en las partes vista y oculta, han sido hallados con ayuda del plano T que pasa por el eje del cono. *Este es un ejemplo de la aplicación de dos procedimientos en una misma construcción: el procedimiento de planos secantes auxiliares y el de esferas secantes auxiliares.*

En la fig. 413 se muestra la unión se las superficies de dos

[1] La línea de intersección de dos superficies de segundo orden, que tienen un plano de simetría común, se proyecta sobre el plano paralelo al plano de simetría en forma de una curva de segundo orden. En el caso dado se obtiene una hipérbola. Los puntos e_1' y e_2' son sus vértices. En la fig. 411 la proyección frontal de la línea de unión de las superficies es una parábola (véase el § 65).

cuerpos de revolución: una cónica y otra con generatriz curvilínea. Se han empleado esferas auxiliares. Primero se hallan las proyecciones de los puntos sobre el plano V y luego sobre el plano H. Por ejemplo, el punto *5* sobre el plano H se ha hallado sobre el arco de circunferencia, descrito desde el punto o con radio $oa=o'a'$; el punto *6* se ha obtenido sobre el arco de radio $oa=o_1'a_1'$. El punto con las proyecciones *4'* y *4* se ha hallado con ayuda de la esfera inscrita en la superficie de revolución con generatriz curvilínea.

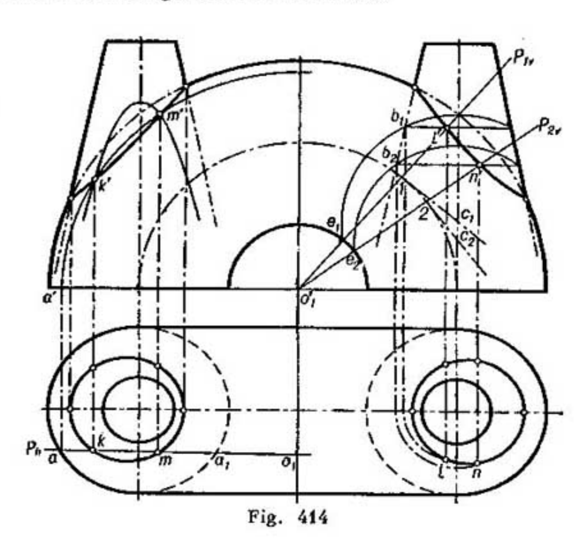


Fig. 414

Los puntos sobre el plano W se han hallado construyendo la tercera proyección con ayuda de las otras dos halladas sobre los planos V y H. Con el fin de economizar lugar, en la fig. 413 las tres vistas se dan no completas.

El ejemplo dado en la fig. 414 permite establecer la ventaja del método de las esferas auxiliares en comparación con otros métodos para el caso dado. Hace falta construir las proyecciones de la línea de unión de las superficies de un cono de revolución y de un anillo circular (en la fig. 414 viene representada la mitad del anillo). En la parte izquierda del dibujo se muestra el empleo de planos secantes auxiliares paralelos al eje del cono. Estos planos cortan a la superficie del cono según hipérbolas, que deben ser construidas con ayuda de puntos, y al anillo, según semicircunferencias de radios

o_1a y o_1a_1. Por ejemplo, una vez construida sobre la proyección frontal la hipérbola (la línea de intersección de la superficie cónica con el plano P), describimos el arco de circunferencia de radio $o_1'a' = o_1a$, con lo que hallamos los puntos k' y m' en la proyección frontal y sus correspondientes proyecciones horizontales k y m.

Es necesario construir una serie de hipérbolas, lo que complica la solución y disminuye la precisión. Sería también incómodo emplear planos perpendiculares al eje del cono, puesto que estos planos, estando situado el anillo tal como se muestra en la fig. 414, cortarían a su superficie según ciertas curvas; para construir cada una de éstas es necesario hallar toda una serie de puntos (véase el § 58). También los planos que pasan por el vértice del cono darán en la intersección con la superficie del anillo curvas, que deberán ser halladas con ayuda de puntos.

La construcción se simplifica y se hace más precisa, si se emplean esferas auxiliares cuyos centros deberán estar situados sobre el eje del cono. Las esferas deben ser elegidas de tal manera que corten al anillo según circunferencias. Esto se puede obtener de la siguiente manera.

Tomemos el plano P_1 que pasa por el eje del anillo y que es perpendicular al plano V. Este plano corta al anillo según una circunferencia de radio $1e_1$ con centro en el punto 1; sobre el plano V esta circunferencia se proyecta en forma de un segmento de recta. ¿Dónde deberán estar situados los centros de las esferas, que pueden ser trazadas por esta circunferencia? Evidentemente, éstos están situados sobre la recta que pasa por el centro de la circunferencia 1 y que es perpendicular al plano P_1. Esta recta se representa en la proyección frontal con la línea $1c_1$ perpendicular al plano P_1 (y, por consiguiente, tangente a la circunferencia axial del anillo, representada en el dibujo con línea de puntos y rayas).

Así pues, debemos trazar una esfera cuyo centro está situado, en primer lugar, sobre el eje del cono, y en segundo, sobre la recta $1c_1$. Tal centro c_1 queda determinado por completo por estas dos rectas, y podemos trazar la esfera con centro c_1 y radio c_1e_1; en el plano V se muestra parte de la proyección de la esfera (un arco de circunferencia). En la intersección de la esfera con el cono se obtiene una circunferencia, que se proyecta en forma de un segmento que pasa por el punto b_1; la intersección de la esfera con el anillo tiene efecto según la circunferencia señalada más arriba, que se proyecta sobre la traza P_{1_v} en forma de segmento. En la intersección de estas rectas se ha hallado el punto l' (la proyección de uno de los puntos de la línea buscada).

Análogamente, con ayuda del plano P_2 y los puntos 2, c_2, b_2, e_2 se ha hallado el punto n'. Para construir las proyecciones horizontales de estos puntos se pueden emplear los paralelos de la superficie cónica, como se muestra para los puntos l y n.

Nos podemos suponer que las rectas $c_1 1$ y $c_2 2$ son los ejes de ciertos cilindros, la sección normal de los cuales coincide con la sección normal del anillo. Si tomamos los puntos *1* y *2* demasiado cerca uno del otro y nos imaginamos que tales puntos son muchos y, por consiguiente, son muchos los ejes trazados por estos puntos y los cilindros, entonces la superficie del anillo resulta sustituida por superficies cilíndricas sucesivamente dispuestas. Por eso el problema se reduce a hallar los puntos comunes para la superficie del cono y la superficie de cada uno de tal «cilindro instantáneo» [1]. Los ejes de los «cilindros instantáneos» cortan al eje del cono en puntos que se toman como centros de las esferas auxiliares que cortan al cono y al «cilindro instantáneo» según circunferencias; las proyecciones de estas circunferencias sobre el plano *V* representan segmentos de líneas rectas. Las circunferencias, según las cuales las esferas auxiliares cortan a los «cilindros instantáneos», son aquellas secciones normales del anillo, a partir de las cuales se inició la construcción.

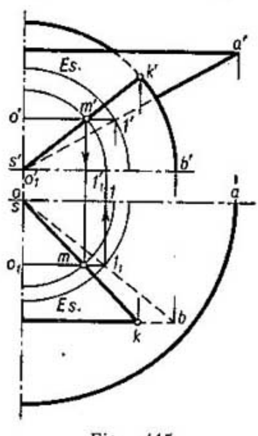


Fig. 415

En la fig. 415 están representados parcialmente dos conos de revolución con vértice común *S* y se muestra la construcción de la generatriz según la cual se cortan las superficies cónicas en las partes representadas de éstas. Uno de los puntos de la generatriz buscada es conocido: éste es el vértice *S*. Para hallar el segundo punto se ha empleado una esfera auxiliar con centro en el punto *S*. La esfera corta a una de las superficies cónicas según un arco de circunferencia, cuyo radio es igual a $o1$ o $o'1'$. A la segunda superficie la esfera la corta según un arco de circunferencia de radio igual a $o_1 1_1$ o $o'_1 1'_1$. Las proyecciones frontales de estos arcos se cortan en el punto m', y las horizontales, en el punto m; los puntos m' y m son las proyecciones del punto *M* (el segundo punto perteneciente a la generatriz buscada).

De tal construcción se hizo uso en la fig. 401.

[1] Hemos empleado la expresión de «cilindro instantáneo» para subrayar la sustitución de la superficie del anillo por una gran cantidad de elementos cilíndricos. Prácticamente se efectúan sólo unas cuantas de estas construcciones.

§ 65. PROYECCIÓN DE LA LÍNEA DE INTERSECCION DE DOS SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN DE SEGUNDO ORDEN SOBRE UN PLANO PARALELO A SU PLANO DE SIMETRÍA COMÚN

En toda una serie de casos tiene efecto la intersección de una superficie de revolución de segundo orden por otra. En estos casos, así como para todas las superficies algebraicas de segundo orden, se obtiene una curva espacial de cuarto orden, llamada *bicuadrada*.

En la nota al pie de la pág. 292 se dijo que si dos superficies de segundo orden tienen plano de simetría común, entonces la curva

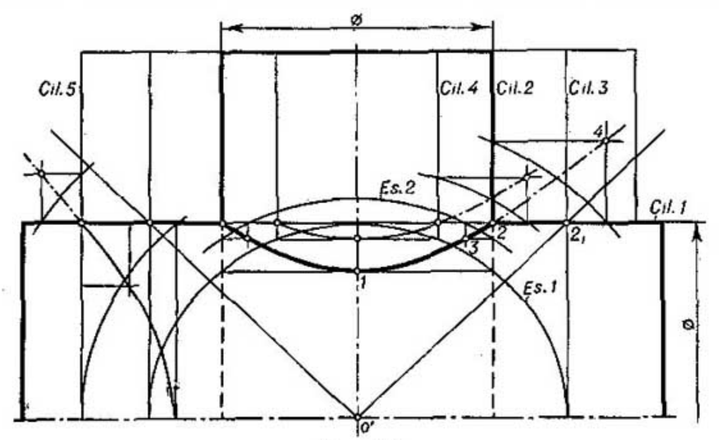


Fig. 416

obtenida en la intersección de estas superficies se proyecta sobre el plano paralelo al plano de simetría de las mismas en forma de una curva de segundo orden. En la fig. 412, a la cual se refiere dicha nota, se representaron dos conos de revolución con ejes que se cortan que determinan el plano de simetría común para estos conos, paralelo al plano V. La proyección frontal de la curva bicuadrada obtenida en este caso representa una hipérbola.

En la fig. 416 se da [1] la proyección frontal de dos cilindros de revolución (*Cil.1* y *Cil.2*) de diferentes diámetros. El punto o'

[1] En éste y en toda una serie de casos que siguen, con el fin de economizar lugar y sin perjuicio para la claridad de la representación se da solamente una parte de la proyección.

es la proyección frontal del punto de intersección de los ejes de los cilindros. La proyección frontal de la curva bicuadrada obtenida representa una hipérbola equilátera (una rama de ella) con centro en el punto o'. Para la construcción se han empleado esferas con centro común en el punto de intersección de los ejes de los cilindros. La esfera (*Es.1*), inscrita en el cilindro de mayor diámetro, permite hallar el punto *1*, que es el vértice de la hipérbola [1]. Las esferas de mayor radio determinan otros puntos de la proyección buscada de la curva (por ejemplo, la esfera *Es.2*, el punto *3*); si en este caso el radio es mayor que el segmento $o'2$, entonces se obtienen puntos (por ejemplo, el *4*) fuera de los límites del área común de las proyecciones de ambos cilindros.

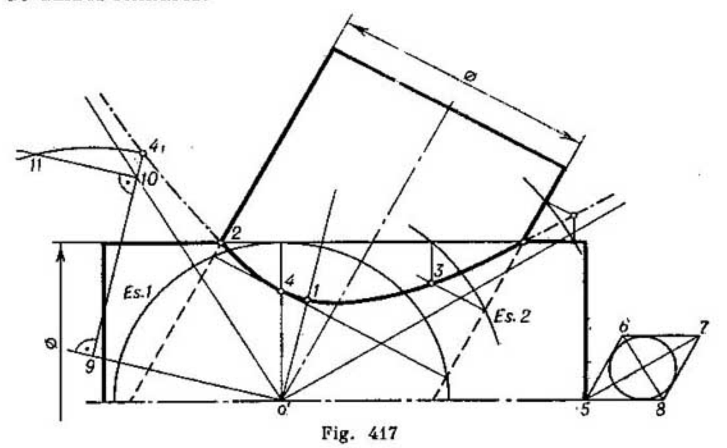


Fig. 417

En la fig. 416 se han trazado las asíntotas de la hipérbola construida; ellas pasan por el punto o' y son perpendiculares entre sí. Estas asíntotas conservan su magnitud para todas las hipérbolas obtenidas en la fig. 416, si se toma, por ejemplo, cilindros con eje vertical de distintos diámetros (*Cil.4* y *Cil.5*). Si los diámetros de los cilindros son iguales (*Cil.1* y *Cil.3*), es decir, estos cilindros tienen una esfera común inscrita (*Es.1*), entonces la proyección frontal de la línea de intersección en la fig. 416 (véase más arriba la fig. 404) representa dos rectas que se cortan bajo un ángulo recto, la posición de las cuales (por ejemplo, $o'2_1$) corresponde a la posición de las asíntotas.

Si los ejes de los cilindros se cortan bajo un ángulo agudo (fig. 417), entonces la proyección de la línea de intersección, para las mismas condiciones que en el caso examinado en la fig. 416, representa también una hipérbola equilátera.

[1] En éste y en otros casos de este parágrafo, donde el problema se reduce a la construcción solamente de la curva, los puntos de esta curva se designan no con letras, sino con cifras sin comilla, que simboliza la proyección frontal.

Los puntos para esta proyección se construyen auxiliándose del método de esferas auxiliares, y en este aspecto no existe diferencia alguna entre los casos representados en las figs. 417 y 416. Prestemos solamente atención en que el punto *4*, obtenido con auxilio de la esfera (*Es.1*) inscrita en el cilindro mayor, no es el vértice de la hipérbola, como esto tenía lugar en la fig. 416.

Las particularidades en la construcción dada en la fig. 417 son las siguientes. Para hallar la posición de las asíntotas se ha construido el rombo *5—6—7—8*, cuyos lados son tangentes a cierta circunferencia y paralelos a las generatrices

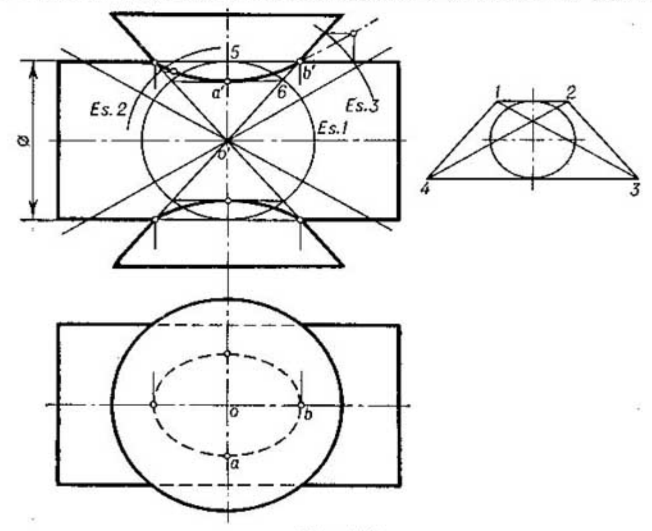


Fig. 418

del cilindro. Las diagonales de este rombo determinan la dirección de las asíntotas. De ahí que las asíntotas sean perpendiculares entre sí y que la hipérbola sea equilátera.

Trazando la bisectriz del ángulo entre las asíntotas, obtenemos el eje real de la hipérbola; sobre este eje deberá encontrarse el vértice (el punto *1*). Para hallar este vértice efectuamos la siguiente construcción: tomando un punto cualquiera de la hipérbola, por ejemplo, el 4_1, trazamos por él una perpendicular al eje imaginario de la hipérbola y señalamos los puntos *9* y *10*, en los que esta perpendicular corta al eje imaginario y a la asíntota; luego trazamos un arco de radio $9—4_1$, intersecando con él en el punto *11* la perpendicular levantada desde el punto *10* a la recta $9—4_1$. El segmento obtenido *10—11* expresa la distancia desde o' hasta *1*, es decir, hasta el vértice de la hipérbola, que es su semieje real.

La línea de intersección de las superficies de revolución representadas en la fig. 418 se proyecta sobre el plano *V*, paralelo al plano de simetría común de estas superficies, en forma de hipérbola (sus asíntotas son paralelas a las diagonales *1—3* y *2—4* del trapecio cuyos lados son respectivamente paralelos a las

generatrices de las superficies dadas y hacen contacto con cierta circunferencia). Pero, en este caso, se tiene además un plano de simetría perpendicular al eje de la superficie cónica, que es horizontal y que pasa por el eje del cilindro. Sobre este plano, la proyección de la línea de intersección de las superficies que se examinan deberá ser una curva de segundo orden. Se obtiene una curva cerrada con dos ejes de simetría perpendiculares entre sí, o sea, una *elipse*. El semieje mayor *ob* de esta elipse es igual al segmento $b'5$, el semieje menor *oa* es igual al segmento $a'6$, es decir, al radio del paralelo de la esfera (*Es. 1*) al que pertenece el punto *A*.

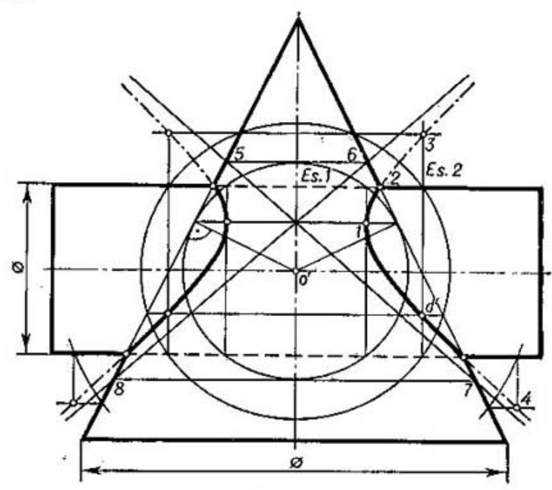


Fig. 419

La hipérbola obtenida en la fig. 418 no es equilátera: sus asíntotas forman ángulos diferentes de 90°. También en la fig. 419, donde igualmente se ha construido una hipérbola como la proyección de la línea de intersección de un cilindro con la superficie de un cono, la hipérbola no es equilátera. Esto es característico para los casos de intersección mutua de superficies cónica y cilíndrica de segundo orden, que tienen un plano común de simetría, cuando la línea de intersección se proyecta sobre un plano paralelo al plano de simetría [1].

En la fig. 419 como centro de las esferas auxiliares sirve el punto *O*, cuya proyección frontal *o'* se encuentra en el punto de intersección de los ejes de las superficies cónica y cilíndrica. La esfera (*Es. 1*) inscrita en la superficie cónica ofrece la posibilidad de obtener la posición del eje real, el centro y el vértice de la hipérbola. Las asíntotas se han obtenido como diagonales del trapecio *5—6—7—8*, en el cual los lados *5—6* y *7—8* son paralelos a la generatriz del cilindro y hacen contacto con la superficie de la esfera (*Es. 1*).

[1] De acuerdo con la investigación de E. A. Glazunov «Sobre las proyecciones de las líneas de intersección de dos superficies de segundo orden, que tienen plano de simetría común», publicada en el año 1958 en la colección «Trabajos del seminario de Moscú sobre la Geometría Descriptiva y la gráfica de ingeniería».

Así, en las figs. 416 y 417 las proyecciones de las líneas de intersección representan una hipérbola equilátera, mientras que en las figs. 418 y 419 se obtenían también hipérbolas, pero no equiláteras. También se obtiene una hipérbola no equilátera en el caso mostrado en la fig. 420, donde viene construida la proyección de la línea de intersección de una superficie cónica de revolución por otra. Aquí la esfera (*Es. 1*) inscrita en el cono de mayor ángulo del vértice da la posibilidad de obtener la posición del eje real, el centro y el vértice de la hipérbola. Las asíntotas se han construido como diagonales del trapecio *4—5—6—7*.

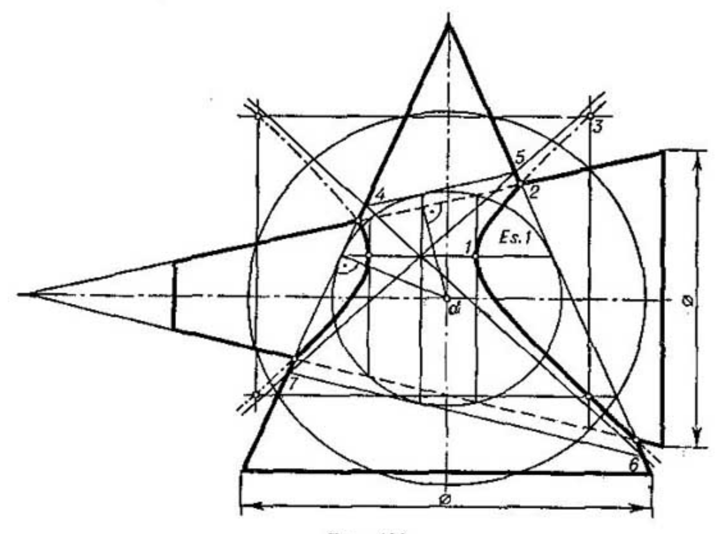


Fig. 420

Un caso análogo se representó en la fig. 412, donde se da el dibujo en dos proyecciones de conos con ejes que se cortan y que son perpendiculares entre sí además un cono pasaba a través del otro.

¿Siempre la proyección de la línea de intersección de dos superficies cónicas es precisamente una hipérbola no equilátera? No, si los ángulos de los vértices de los conos, representados en las figs. 412 y 420, son iguales entre sí, entonces la hipérbola que se obtiene como proyección de la línea de intersección de las superficies cónicas de revolución con ejes que se cortan sobre un plano paralelo a estos ejes, será equilátera.

En la tabla que se da a continuación, se exponen indicaciones acerca de la proyección de la línea de intersección de dos superficies de revolución de segundo orden con ejes que se cortan sobre un plano paralelo a estos ejes, tomadas de la investigación mencionada en la nota al pie de la pág. 299.

Proyección que se obtiene	Superficie de revolución	
	sin ninguna condición particular	con condiciones, a parte de las fundamentales
Hipérbola	Cilíndricas, Cónicas, Paraboloides, Hiperboloides, Elipsoides estirados } en cualesquiera combinaciones	Ambas superficies son elipsoides achatados
Hipérbola equilátera	Ambas superficies son cilíndricas Ambas superficies son paraboloides Cilíndrica y paraboloide	Ambas superficies son cónicas con ángulos iguales en los vértices de los conos. Ambas superficies son hiperboloides con ángulos iguales en los vértices de sus conos asintóticos. Cónica o hiperboloide con ángulos iguales en el vértice del cono y en el vértice del cono asintótico del hiperboloide. Ambas superficies son elipsoides, pero semejantes.

En la pag. 290 se dio la fig. 411 en la que se mostraba la construcción de la proyección frontal de la línea de unión de las superficies de un cilindro de revolución y de una esfera. Además, el plano común de simetría de las superficies, determinado por el eje del cilindro y el centro de la esfera, era paralelo al plano V. Por esta razón, la proyección frontal de la línea de unión de las superficies dadas representa una curva de segundo orden, en el caso examinado, una parábola con vértice en el punto b'.

Fig. 421

En la fig. 421 se muestra la construcción de una parábola (la proyección de la línea de intersección de una esfera con un cilindro). Los puntos *2* y *3* (así como los simétricos a éstos) pertenecen notoriamente a la proyección buscada. El punto *4* se ha construido con auxilio de una circunferencia trazada desde el punto o'. Esta circunferencia es el meridiano principal de la esfera (*Es.2*), cuyo centro se

encuentra en el eje del cilindro en el punto *O*. Para la construcción del punto *1* (el vértice de la parábola) se ha tomado una esfera auxiliar (la *Es. 1*); el punto *1* se ha hallado en la intersección de la recta *6—7* con la proyección del eje de la parábola. En la investigación mencionada más arriba [1] fue establecido que el parámetro de la parábola es igual a la distancia entre los puntos *c'* y *o'*. Llevando sobre el eje de la parábola la mitad de este segmento a cada lado del vértice de la misma, obtenemos los puntos *8* y *9*. Por el punto *8* pasa la directriz de la parábola, y en el punto *9* se encuentra su foco. Ahora se pueden construir los puntos de la parábola auxiliándonos de la directriz y del foco hallados.

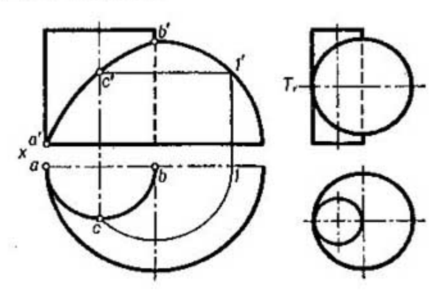


Fig. 422

Si el diámetro del cilindro, que corta a la esfera, es igual al radio de ésta y la generatriz del cilindro pasa por el centro de la esfera (fig. 422), se obtiene una curva bicuadrada, que lleva el nombre de curva de Viviani [2]. Su proyección frontal es una parábola.

La proyección sobre el plano, paralelo al otro plano de simetría (véase la fig. 422, a la derecha), es decir, en el caso dado sobre el plano *H*, coincidiendo con la proyección del cilindro, representa una circunferencia, o sea, una curva de segundo orden, así como debe ser de acuerdo con la regla general indicada al comienzo de este parágrafo.

Para la esfera, todo plano diametral es un plano de simetría. Si cualquier superficie de revolución de segundo orden corta a una esfera cuyo centro se encuentra en el plano de simetría de esta superficie, entonces la curva de intersección se proyecta sobre el plano paralelo al plano de simetría, en forma de una curva de segundo or-

---

[1] Véase la nota al pie de la pág. 299.

[2] Vicente Viviani (1622—1703), matemático y arquitecto, discípulo de Galileo, empleaba esta curva bicuadrada para las ventanas en las cúpulas esféricas.

den. Nosotros ya tropezamos con esto en las figs. 418 y 422; si se construyera la proyección horizontal en la fig. 421, entonces la curva de intersección del cilindro con la esfera se proyectaría en forma de circunferencia, lo que es evidente, lo mismo que en la fig. 422. Más arriba, en la fig. 398, la proyección de la curva de intersección de un cono con la superficie de una semiesfera representaba sobre el plano V una parábola, y sobre el plano W, una elipse. Hay que imaginarnos una segunda semiesfera y un segundo cono en la misma posición recíproca que en la fig. 398, y unir una a otra las bases circulares de ambas semiesferas; el plano de contacto será un plano de simetría claramente expresado, paralelo al plano W, y la curva sobre el plano W será una elipse.

También en la fig. 399 se obtuvieron una parábola y una elipse como proyecciones de la línea de intersección.

En la tabla que se da a continuación se indica en cuáles casos, en la intersección de dos superficies de revolución de segundo orden con ejes que se cortan, se obtienen parábolas y elipses como proyecciones de las líneas de intersección sobre planos paralelos al plano de simetría de estas superficies [1].

Proyección que se obtiene	Superficies de revolución
Parábola	Una esfera con superficies cilíndrica, cónica, paraboloide, hiperboloide, elipsoide
Elipse	Un elipsoide achatado con superficies cilíndrica, cónica, paraboloide, hiperboloide, elipsoide estirado

Conociendo cuál línea precisamente debe obtenerse al construir las proyecciones, en toda una serie de casos, se pueden emplear las propiedades geométricas de estas líneas, lo que simplifica la construcción y permite obtener resultados más exactos.

PREGUNTAS A LOS §§ 63—65

1. ¿Según cuáles líneas se cortan entre sí: a) las superficies cilíndricas cuyas generatrices son paralelas entre sí, b) las superficies cónicas con vértice común?
2. ¿Cómo se construyen las generatrices de la superficie reglada llamada cilindro con tres directrices, si dos de ellas o las tres son líneas curvas?
3. ¿Cuáles líneas se obtienen al cortarse mutuamente dos superficies de revolución circunscritas a una esfera común para ellas o inscritas en una esfera?
4. ¿Según cuáles líneas se cortan entre sí las superficies de revolución que tienen eje común (superficies coaxiales)?

[1] Tomadas de la misma investigación (véase la nota al pie de la pág. 299).

5. ¿En cuáles casos es posible y conveniente emplear esferas secantes auxiliares?

6. ¿A cuál curva se le llama bicuadrada?

7. ¿En forma de cuál línea se proyecta la curva bicuadrada sobre un plano paralelo al plano común de simetría de dos superficies de segundo orden que se cortan?

8. ¿Cuál de las curvas de segundo orden es la proyección de la línea de intersección de una superficie cilíndrica de revolución por otra sobre un plano paralelo al plano común de simetría de estas superficies?

9. ¿En cuál caso la proyección de la línea de intersección de superficies cónicas, que tienen plano de simetría común paralelo al plano de proyección, es una hipérbola equilátera?

10. ¿Cuáles curvas pueden ser las proyecciones de la línea de intersección de las superficies de un cilindro y un cono de revolución con una esfera, en el caso de que tengan un plano común de simetría?

§ 66. EJEMPLOS DE CONSTRUCCIÓN DE LAS LÍNEAS DE INTERSECCIÓN DE UNA SUPERFICIE CON OTRA

A continuación se examinan varios ejemplos con el empleo de los métodos de construcción indicados en los parágrafos anteriores, y también procedimientos especiales, útiles para la construcción de los puntos de la línea buscada en los casos de superficies de posición particular[1].

En la fig. 423 se da el caso en que la proyección de la línea de intersección sobre el plano H se confunde con una circunferencia (la proyección de un cilindro

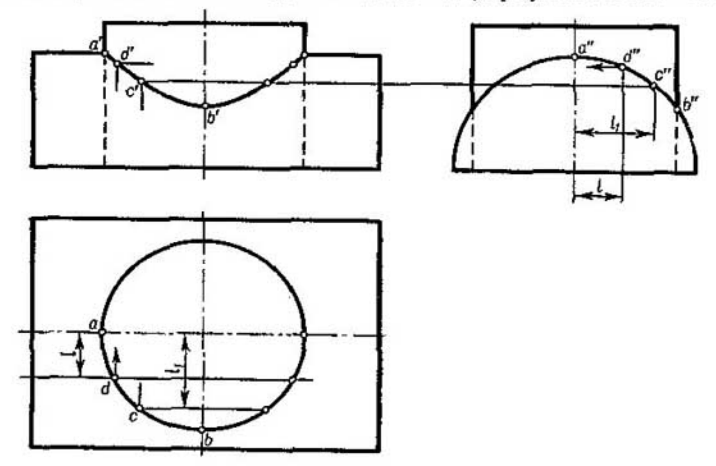


Fig. 423

[1] En algunos dibujos, para economizar lugar, no todas las proyecciones se dan completas.

con eje vertical), y sobre el plano W, con una semicircunferencia (la proyección de un cilindro con eje horizontal). Falta hallar los puntos con ayuda de los cuales se puede construir la proyección de la línea buscada sobre el plano V (la hipérbola con vértice en el punto b').

Evidentemente, la proyección b' se determina directamente con ayuda de la proyección b'', y, por ejemplo, la proyección d' se determina como el punto de intersección de las líneas de referencia, trazadas desde los puntos d y d'', coordinadas entre sí por la distancia l hasta los ejes de las proyecciones horizontal y de perfil.

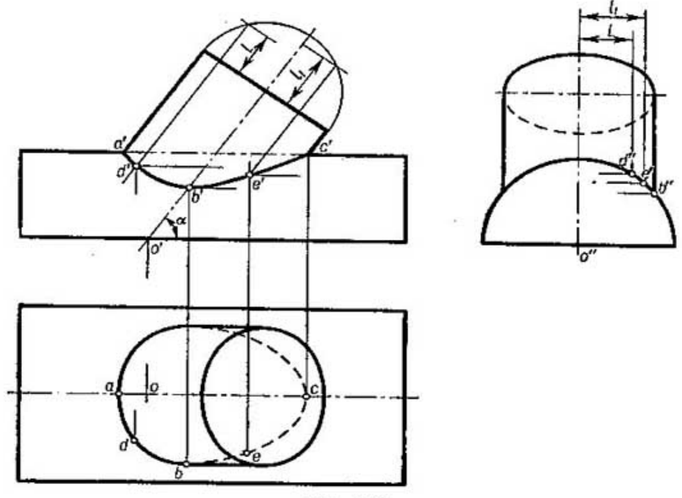


Fig. 424

Igualmente, valiéndose de las proyecciones c y c'', coordenadas entre sí, se determina la proyección c'. Como se ve, aquí no es necesario trazar planos o esferas secantes auxiliares.

En la fig. 424, para construir las proyecciones b', d' y e' se ha hecho uso de las proyecciones de perfil b'', d'' y e'', con ayuda de las cuales han sido halladas las proyecciones frontales de las generatrices del cilindro oblicuo y las proyecciones b', d' y e'. Disponiendo de las proyecciones b'', d'', e'', a', b', c', d' y e', se pueden hallar las proyecciones a, b, c, d y e.

En el caso representado en la fig. 425, los puntos para las proyecciones frontales de las líneas según las cuales el cilindro oblicuo corta a la superficie del cilindro con eje vertical, se han hallado a partir de la posición de las proyecciones horizontales de estos puntos. Es necesario solamente construir las proyecciones frontales de las generatrices correspondientes del cilindro oblicuo. Entre los puntos señalados en la fig. 425, son característicos los puntos $1'$ y $5'$ (los puntos más cercanos al eje del cilindro vertical en las partes vista y oculta de la proyección frontal de la línea derecha), los puntos $3'$ y $3'$ (los puntos más cercano y más

alejado del plano H en las generatrices de contorno del cilindro oblicuo), los puntos $4'$ y $4'$ (que separan la proyección de la generatriz de contorno del cilindro vertical de la proyección de la curva). A estos puntos les corresponden puntos del mismo significado en la curva a la izquierda.

En la fig. 426 se muestra la intersección de la superficie de un cono con un cilindro. Los puntos de partida para la construcción de los puntos $1'$, $2'$, ..., $6'$ son los puntos 1, 2, ..., 6 de la proyección horizontal de la línea en la superficie cónica. Por ejemplo, los puntos $4'$ y $4'_1$ se obtienen en la proyección frontal del paralelo de radio $o4$, el punto $3'$, en la proyección frontal del paralelo de radio $o3$

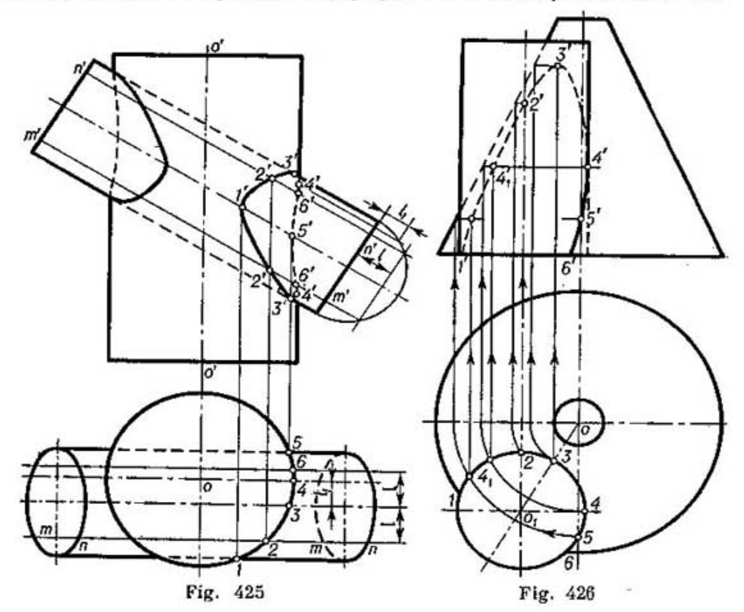


Fig. 425 Fig. 426

La construcción de la proyección frontal de la línea de intersección de una superficie cilíndrica con un cono (fig. 427) se ha efectuado con ayuda de los puntos de partida tomados en la proyección de perfil del cilindro. Los puntos $1''$, $3''$, $4''$, $6''$ y $8''$ dan la posibilidad de hallar inmediatamente los puntos característicos $1'$, $3'$, $4'$, $6'$ y $8'$ para la proyección frontal. Los demás puntos pueden ser hallados con auxilio de las generatrices; por ejemplo, tomando la proyección $s'c'$ de la generatriz, sobre la cual deberá estar situada la proyección $5''$, hallamos, por el segmento l, el punto c y la proyección $s''c''$, y luego $s'c'$; falta obtener las proyecciones $5'$ y 5.

En la fig. 428, las proyecciones frontales de los puntos de la línea, según la cual el cilindro corta a la superficie de la semiesfera, pueden ser obtenidas con ayuda de las proyecciones horizontales sobre los paralelos correspondientes de la esfera. Por ejemplo, con ayuda del punto k se ha determinado el paralelo

de radio *ok* y en su proyección frontal se ha hallado la proyección *k'*. Lo mismo se muestra para los puntos *A* y *F*. Pero, claro está, se puede, por ejemplo, para los mismos puntos *A* y *F*, partiendo de nuevo de la posición de sus proyecciones horizontales *a* y *f*, tomar el plano secante *T* paralelo al plano *V* y hallar las proyecciones *a'* y *f'* sobre la semicircunferencia obtenida al cortar la superficie

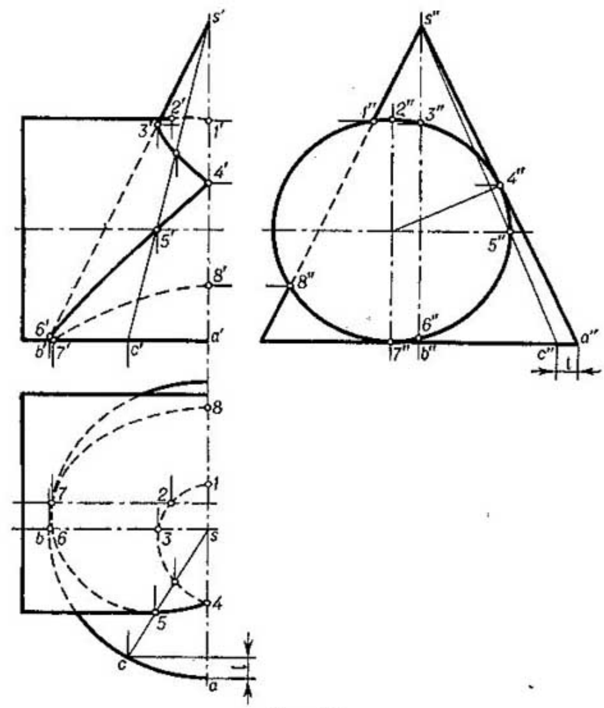


Fig. 427

de la semiesfera con el plano *T*. Evidentemente, en muchos casos es conveniente variar los métodos de construcción de los puntos para la construcción de las proyecciones de las líneas de intersección, eligiendo los más cómodos de ellos, pretendiendo hacer la construcción más simple y más exacta.

En la fig. 428, las proyecciones *b'* y *e'* han sido halladas en el meridiano principal de la esfera directamente con ayuda de los puntos *b* y *e*. De la misma manera se podrían hallar las proyecciones *d'* y *g'*, si se conociera la proyección de perfil; ahora, sin la proyección de perfil, los puntos *d'* y *g'* pueden ser hallados, por ejemplo, de modo semejante a las proyecciones *a'* y *f'*.

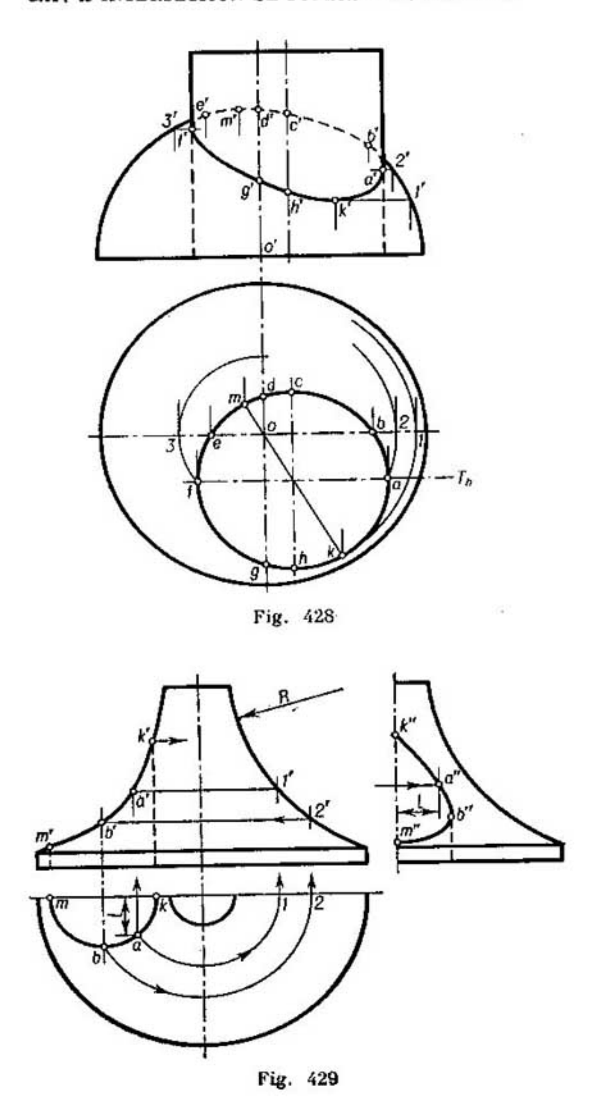


Fig. 428

Fig. 429

Las proyecciones a, b, c, y otras, señaladas en la fig. 428, determinan los puntos característicos para la proyección frontal de la curva y para la proyección de perfil en el caso de su construcción. Así, los puntos k' y m' son los puntos más bajo y más alto; en los puntos b' y e' se «interrumpe» el meridiano principal en la esfera, y en los puntos a' y f' la línea de intersección se divide en vista y oculta; los puntos d', g', c', y h' no tienen gran importancia para la proyección frontal, pero permiten construir los puntos característicos en la proyección de perfil de la curva.

En la fig. 429 está representado cierto cuerpo de revolución con un orificio cilíndrico. La curva $k'a'b'm'$ se ha construido con auxilio de los puntos k, a, b, m, es decir, con ayuda de las proyecciones horizontales conocidas por nosotros. Por ejemplo, tomando el punto a, construimos las proyecciones del paralelo en la superficie de revolución, y sobre la proyección frontal de este paralelo hallamos la proyección a'.

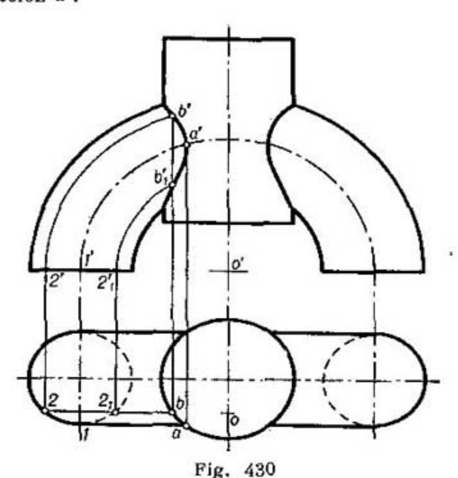


Fig. 430

Para construir la proyección frontal de la línea de contacto de la superficie del anillo circular y el cilindro en la fig. 430, se han utilizado las proyecciones horizontales de ciertos puntos, (de la misma menera que en la fig. 429). Por ejemplo, conociendo la posición del punto b podemos trazar en la superficie del anillo arcos de radios $o2$ y $o2_1$ y sobre estos arcos obtener los puntos b' y b_1'. Aquí se hace uso de un sistema de secciones circulares de la superficie del anillo.

En la fig. 431 se ha aprovechado también el hecho de que es conocida la posición de los puntos de una de las proyecciones de la línea buscada. Esto da la posibilidad de construir los puntos de la otra proyección. En el caso representado en la fig. 431, a la izquierda, se ha obtenido en la proyección horizontal un punto angular (el punto de inflexión).

La construcción de la proyección frontal de la curva de intersección de las superficies cónica y cilíndrica en la fig. 432 podría haber sido efectuada como, por ejemplo, se muestra en la fig. 419, es decir, con auxilio de esferas con centro en el punto C. Una vez construida la hipérbola se puede construir la proyección

horizontal de la curva auxiliándose de las generatrices del cilindro; por ejemplo, la generatriz sobre la cual se encuentra el punto E se determina por el segmento l_1.

En la fig. 432 se muestra otro procedimiento de construcción, a saber: el empleo de *las proyecciones sobre un plano auxiliar*, en el caso dado, un plano proyectante frontal perpendicular al eje de la superficie cilíndrica. La línea de intersección se proyecta sobre este plano en forma de un arco en la semicircunferencia que es la proyección de esta superficie. Dándose los puntos deseados

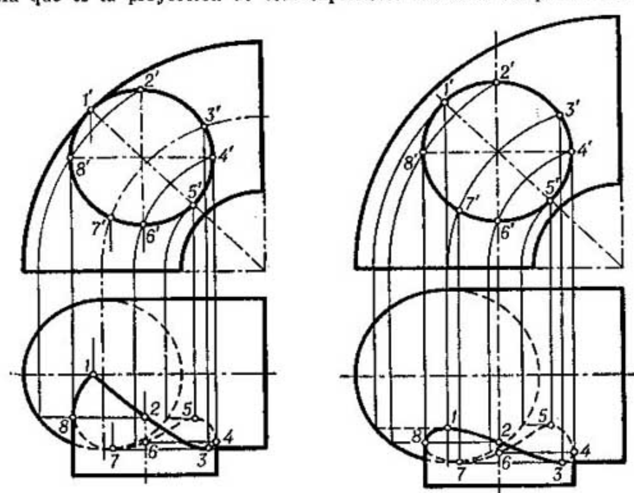


Fig. 431

sobre este arco, se pueden construir sus proyecciones horizontales y frontales. Por ejemplo, tomando el punto e_t, determinamos el segmento l_2 en la semicircunferencia de radio R, que representa la mitad del paralelo en el cono. Llevando el segmento l_2 (como se muestra en el dibujo) sobre la proyección frontal, obtenemos sobre la línea de referencia con la proyección e_t la proyección e'.

En la fig. 432, además, se muestra el desarrollo de la superficie lateral del cono truncado examinado en este problema. Se ha construido la proyección del vértice del cono (el punto s'); la circunferencia de la base superior del cono ha sido girada hasta la posición paralela al plano V, y se ha dividido en unas cuantas partes (en el dibujo se muestra la mitad de esta circunferencia). Proyectando los puntos g_2, g_3, etc. sobre la recta g_1g_7, trazamos por estas proyecciones y por el punto s' las proyecciones de las generatrices hasta su encuentro con la proyección de la línea de intersección de las superficies; por ejemplo, $s'k'$ ha sido trazada por g_3'.

Una vez construido el desarrollo de la superficie lateral del cono, llevamos sobre el mismo las longitudes de los segmentos de las generatrices. Por ejemplo, hallando por el método de giro la longitud del segmento de la generatriz G_3K, la llevamos respectivamente sobre el desarrollo.

En la fig. 433 se ha construido la línea de intersección de un prisma cuadrangular con un cilindro y el desarrollo de la parte obtenida del prisma.

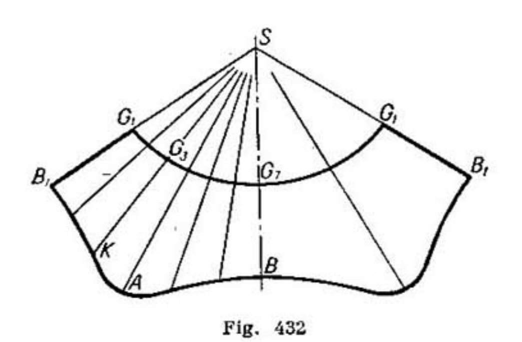


Fig. 432

Cada una de las caras del prisma corta a la superficie cilíndrica según una elipse; estas elipses se cortan entre sí en puntos, que son los puntos de intersección de las aristas del prisma con la superficie cilíndrica. Las proyecciones frontales de los puntos indicados se determinan con auxilio de sus proyecciones de perfil. Para cualquier punto E, con auxilio de su proyección e'' determinamos la proyección e, y valiéndonos de las proyecciones e'' y e hallamos e'. Los puntos a' y b' se determinan con ayuda de sus proyecciones horizontales.

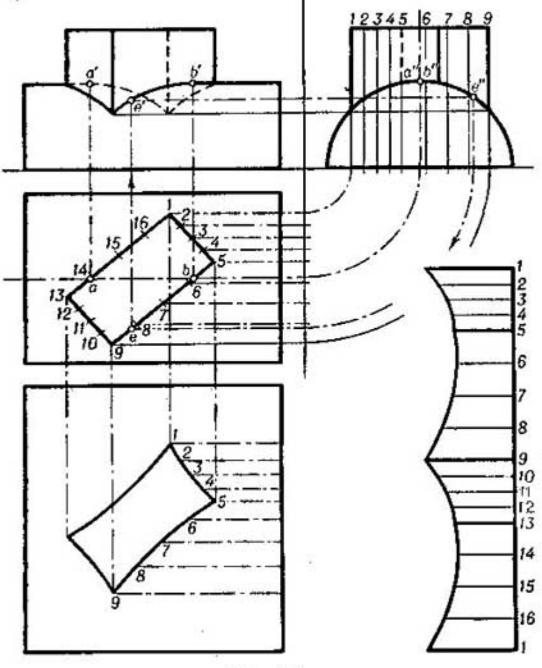


Fig. 433

Para construir el desarrollo del prisma se ha efectuado la división de la proyección horizontal del prisma en segmentos, con la particularidad de que se ha tomado igual número de divisiones en cada cara. Esta división corresponde a la división de la superficie cilíndrica en la zona de su intersección con el prisma.

En la fig. 434 se ha construido la línea de intersección de una pirámide con un cilindro y el desarrollo de ambas superficies.

Las líneas de intersección son elipses, que se cortan entre sí en los puntos de intersección de las aristas de la pirámide con la superficie del cilindro. El punto b' puede ser también construido así como se muestra en el dibujo, o sea, sin auxilio de la proyección de perfil.

Para la construcción de los desarrollos de las superficies de la pirámide y el cilindro se ha dividido la circunferencia en la proyección horizontal del cilindro en 12 partes iguales. Para hallar los puntos, pertenecientes a las elipses, en el desarrollo de la superficie de la pirámide se han trazado rectas auxiliares por el vértice de la pirámide (por ejemplo, la recta *SG*). La longitud de los segmentos de estas rectas (por ejemplo, *E1*) se ha hallado haciendo uso del método de giro hasta la posición paralela al plano *V*.

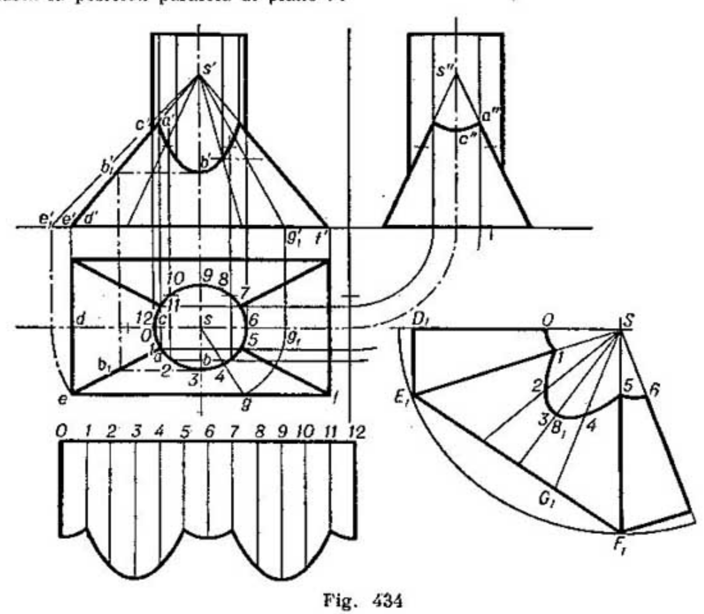


Fig. 434

En la fig. 435 se muestra un ejemplo de la construcción de la línea de intersección de un prisma con una esfera y el desarrollo de la superficie del prisma. Las caras del prisma cortan a la superficie según arcos de circunferencia. Las proyecciones de estos arcos sobre el plano *H* son partes de elipses; la proyección de la línea de intersección sobre el plano *V* se compone de partes de elipses, arcos de circunferencias (ya que dos caras del prisma son paralelas al plano *V*) y una línea recta. Se han hallado los puntos de intersección de las aristas del prisma con la esfera. Luego, se deben señalar los puntos pertenecientes simultáneamente a la línea de intersección del prisma con la esfera y al meridiano principal de la esfera. El plano, que determina el meridiano principal, corta al prisma según una recta sobre la cual deberán encontrarse los puntos indicados. En el dibujo se muestra el desarrollo del prisma. La curva en el desarrollo está compuesta por arcos de circunferencias. Una parte de los radios para describir estos arcos se ha tomado parte de la proyección frontal (R_2, R_3, R_4) y la otra se ha hallado con ayuda de una proyección auxiliar (R_1 y R_5).

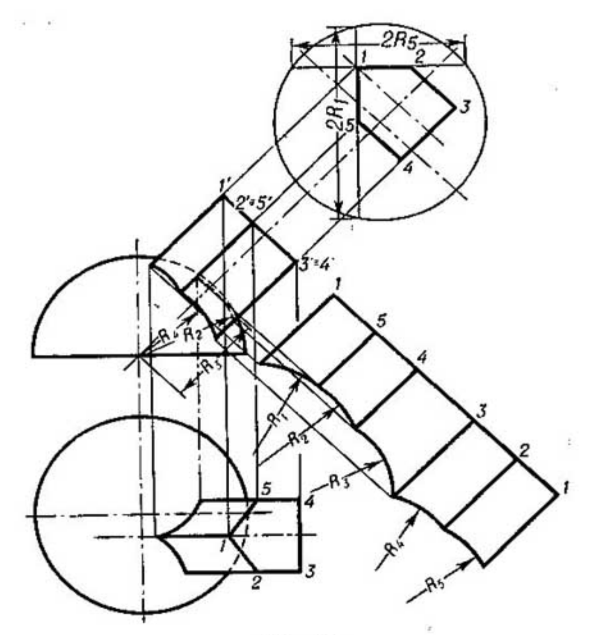


Fig. 435

§ 67. INTERSECCIÓN DE UNA LÍNEA CURVA CON UNA SUPERFICIE CURVA

Para hallar los puntos de intersección de una línea curva con una superficie curva es necesario trazar por la línea curva cierta superficie auxiliar, construir la línea de intersección de las superficies auxiliar y dada, y hallar los puntos de intersección de esta línea con la línea curva dada [1].

Examinemos algunos ejemplos de la intersección de una curva espacial (curva de doble curvatura) con una superficie curva.

---

[1] Se debe prestar de nuevo atención en la comunidad de este método con el método empleado en los casos examinados más arriba de intersección de una recta con una superficie (§ 59) y de una recta con un plano (§ 25).

1. En la fig. 436 se muestra la construcción del punto de interesección de la curva AB con una superficie cilíndrica, dada por su traza horizontal MN y la dirección de la generatriz NP.

Por la curva AB se ha trazado una superficie cilíndrica auxiliar, cuyas generatrices son paralelas a NP. Con tal dirección de las generatrices la línea

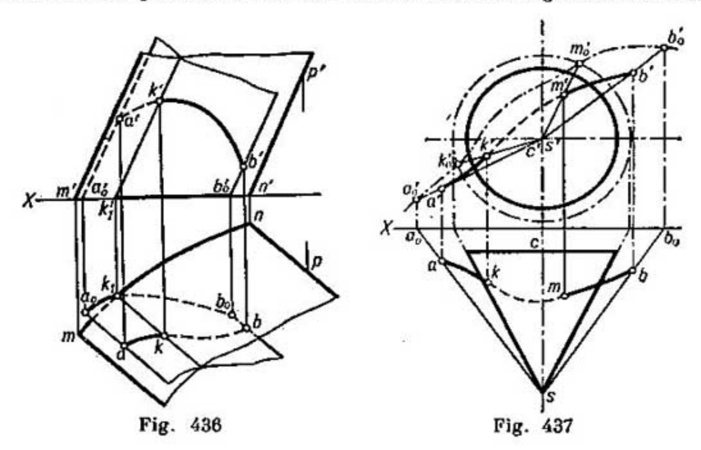


Fig. 436 Fig. 437

de intersección de ambas superficies será la generatriz común para ellas. A continuación se ha construido la traza de la superficie cilíndrica auxiliar sobre el plano H (la curva A_0B_0). En la intersección de las curvas MN y A_0B_0 se obtiene el punto K_1, por el cual pasa la línea de intersección de las superficies (la generatriz común de éstas). Esta generatriz corta a la curva dada AB en el punto K, que es precisamente el punto buscado de intersección de la línea AB con la superficie cilíndrica dada.

2. Para construir los puntos de intersección de la curva AB con la superficie cónica (fig. 437) por la curva AB se ha tıazado una superficie cónica auxiliar, cuyo vértice coincide con el vértice S del cono dado. Con tal posición de ambas superficies cónicas, en el caso de su intersección se obtienen rectas, que son generatrices comunes para ambas superficies (véase el § 63).

Sobre el plano V se han construido las trazas de las superficies cónicas dada y auxiliar. En la intersección de ambas trazas obtenemos los puntos K_0 y M_0 que determinan las generatrices SK_0 y SM_0 que en la intersección con la curva AB dan los puntos buscados (K y M) de intersección de esta curva con la superficie cónica dada.

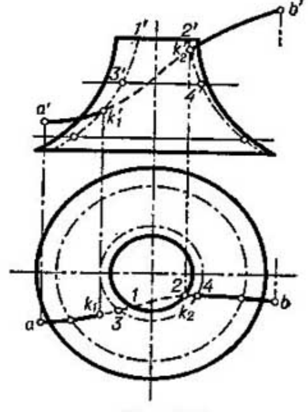


Fig. 438

3. En la fig. 438 se muestra la construcción de los puntos de intersección de la curva AB con la superficie de un anillo circular.

Por la curva AB se ha trazado una superficie cilíndrica auxiliar, cuyas generatrices son perpendiculares al plano H. Luego se ha hallado la línea de intersección de esta superficie con la superficie dada, para lo cual se ha trazado una serie de planos que cortan a la superficie dada según paralelos. Puesto que las generatrices de la superficie cilíndrica auxiliar son perpendiculares al plano H, en la intersección de las proyecciones horizontales de los paralelos con ab se obtienen puntos (*1*, *2*, *3*, ...), que son las proyecciones horizontales de los puntos que determinan la línea de intersección de las superficies dada y auxiliar. Construyendo la proyección frontal de esta línea obtenemos las proyecciones k_1', k_2', y con ayuda de éstos hallamos las proyecciones k_1 y k_2.

PREGUNTAS A LOS §§ 66 Y 67

1. Indiquen los métodos que se emplean para construir las proyecciones de la línea de intersección de una superficie con otra.
2. ¿Cómo se puede utilizar el caso cuando una de las proyecciones de la línea de intersección coincide con la proyección de la superficie cilíndrica?
3. ¿Cómo se debe proceder si hace falta hallar el punto (puntos) de intersección de cierta línea curva con una superficie curva? ¿En particular, si la curva corta a una superficie cilíndrica o a una superficie cónica?

XI
CAPITULO

DESARROLLO DE LAS SUPERFICIES CURVAS

§ 68. DESARROLLO DE SUPERFICIES CILÍNDRICAS Y CÓNICAS

El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro circular recto, conocido por la Estereometría, se mostró en la fig. 305. La base del rectángulo obtenido en este caso es igual a la circunferencia desarrollada (πd), y su altura es igual a la altura del cilindro. En la fig. 362 está representado el desarrollo de la superficie de un cilindro circular recto con un corte plano según una elipse. Aquí el fundamento es la sección normal de una superficie cilíndrica de revolución, o sea, la circunferencia. Esta se ha desarrollado en una recta; esta recta se ha dividido en cierto número de partes iguales, que corresponde a la división de la circunferencia en la fig. 361. A continuación, se ha empleado el esquema de desarrollo de la superficie de un prisma. Aquí, la superficie cilíndrica como si se sustituyera por la superficie de un prisma inscrito en ella. Las aristas del prisma son iguales a los segmentos de las generatrices de la superficie cilíndrica [1]. El desarrollo teórico de la superficie cilíndrica es tanto más exacto, cuanto más caras tiene el prisma inscrito en el cilindro, y cuanto menor es cada segmento de la línea quebrada que delimita el desarrollo de la superficie prismática [2].

El desarrollo de una superficie cónica, en el caso general se efectúa por el esquema de desarrollo de la superficie de una pirámide.

---

[1] La sustitución de una superficie por otra, más simple, o de una línea curva por una quebrada, que aproximadamente expresa la primera, se llama *aproximación* (de la palabra latina aproximare — acercarse), lo que en Matemáticas significa la expresión aproximada de unas magnitudes (o objetos geométricos) por otras más conocidas.

[2] En el caso de un gran número de construcciones surgen inexactitudes que influyen en la exactitud total del resultado.

En la fig. 308 para el desarrollo de la superficie lateral de un cono circular recto se empleó la construcción, conocida por la Estereometría, con el cálculo del ángulo del sector que representa el desarrollo buscado ($\varphi = \frac{R}{L} \cdot 360°$, donde R es el radio de la base del cono y L es la longitud de su generatriz).

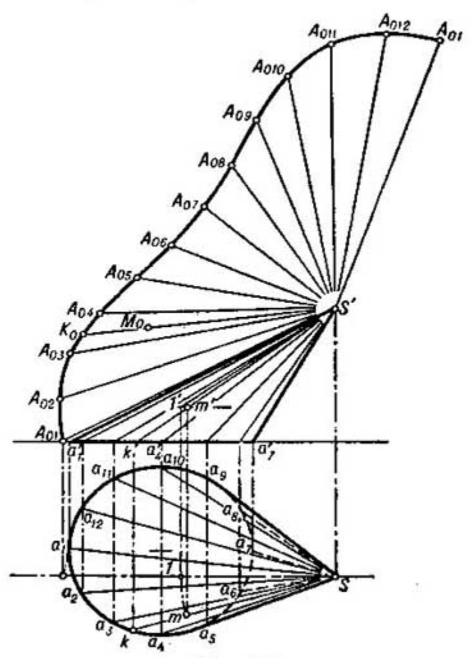


Fig. 439

Ahora examinemos la construcción del desarrollo de la superficie lateral de un cono oblicuo con base circular (fig. 439).

La circunferencia de la base se ha sustituido por un polígono con los lados A_1A_2, A_2A_3 etc., y la superficie cónica, por la superficie de una pirámide con las caras triangulares SA_1A_2, SA_2A_3 etc. En forma desarrollada la superficie representa el conjunto de estos triángulos.

Determinando (por el método de giro) la longitud del segmento SA_1 (el segmento $s'A_{01}$) y la longitud del segmento SA_2 (el segmento

$s'A_{02}$), construimos un triángulo según sus tres lados $s'A_{01}$, $s'A_{02}$ y a_1a_2 (la cuerda), luego construimos el segundo triángulo $s'A_{02}A_{03}$, para lo cual determinamos la longitud del segmento SA_3 (el segmento $s'A_{03}$) y tomamos la cuerda a_2a_3 etc. Obtenemos los puntos A_{01}, A_{02} etc., por los cuales trazamos una curva suave.

Si es necesario hallar en el desarrollo un punto, dado en la superficie, por ejemplo, el M (m', m), entonces por este punto se traza la generatriz $s'k'$, sk, se halla su posición en el desarrollo ($s'K_0$) y se lleva sobre $s'K_0$ el segmento $s'M_0$. Para construir en el desarrollo el segmento $s'K_0$, hay que marcar la curva $A_{01}A_{02}A_{03}$... a partir del punto A_{03} con un arco de radio a_3k y trazar por los puntos obtenidos K_0 y s' una recta. El segmento $s'M_0$ representa la magnitud verdadera del segmento $s'm'$, sm, obtenido al girar el segmento $s'm'$, sm a la posición $s'1'$, $s1$. Obtenemos que $s'M_0=s'1'$.

Se puede plantear también el problema inverso: construir las proyecciones del punto M dado en el desarrollo (M_0). En este caso se debe comenzar trazando por el punto M_0 en el desarrollo el segmento $s'K_0$, hallar en la circunferencia de la base del cono el punto k en virtud de la igualdad de los segmentos A_{03} K_0 y a_3k. Construyendo las proyecciones sk y $s'k'$ de la generatriz, hallamos las proyecciones del segmento SM, para lo cual haciendo girar al segmento SK lo llevamos a la posición en la que se proyecta en verdadera magnitud (por ejemplo, a la posición paralela al plano V), marcamos en esta posición la longitud $s'M_0$ del segmento ($s'1'=s'M_0$) y lo hacemos volver a la posición inicial.

En la fig. 440 se muestra la construcción del desarrollo de la superficie lateral de un cono truncado, con la condición de que el cono no puede ser construido hasta un cono completo.

Se construye un cono auxiliar semejante al dado. Es racional elegir el diámetro de la base de este cono (d) de modo tal, que la relación $\frac{D}{d}$ se exprese por un número entero (k). El cono auxiliar puede ser construido como se muestra en la fig. 440, o bien fuera del cono truncado.

A continuación se construye el desarrollo de la superficie lateral del cono auxiliar (el sector $S_0A_0A_{01}$), se elige arbitrariamente el punto K, a partir de este punto se trazan los rayos KA_0, $K1_0$, $K2_0$, $K3_0$ correspondientemente a las divisiones del arco A_0A_{01}, y sobre estos rayos se llevan los segmentos $KA_1=$ $=k\cdot KA_0$, $K1_1=k\cdot K1_0$, $K2_1=k\cdot K2_0$, $K3_1=k\cdot K3_0$, donde el coeficiente $k=\frac{D}{d}$.
Por los puntos A_1, 1_1, 2_1 se trazan rectas paralelas a S_0A_0, S_01_0, S_02_0 respectivamente, y sobre estas rectas se llevan los segmentos $A_1A_2=l$, $1_11_2=l$, $2_12_2=l$. Del mismo modo se marca $3_13_2=l$. Ahora es necesario trazar una curva de plantilla por los puntos A_1, 1_1, 2_1, 3_1 y por los puntos A_2, 1_2, 2_2 y 3_2.

La segunda mitad del desarrollo puede ser construida de la misma manera que la primera, o en virtud de la simetría respecto del eje S_03_1.

En la fig. 441 se da una variante de la construcción del desarrollo[1]. Semejantemente a cómo se hizo en la fig. 440, se ha tomado un cono auxiliar (en la fig. 441 la relación $\frac{D}{d}$ es igual a tres) y se ha construido su desarrollo (se muestra

[1] Propuesto por K. V. Beschástnov.

la mitad). Luego, desde el punto K_0 se han trazado varios rayos (por los puntos $A_0, 1_0, 2_0, \ldots$) y la recta K_0M bajo un ángulo de $\approx 45°$ a K_0A_1. Sobre esta recta se han tomado los puntos L y M de modo tal, que $K_0M : K_0L$ sea igual a tres (es decir, a la relación aceptada entre D y d). Ahora se han trazado los segmentos

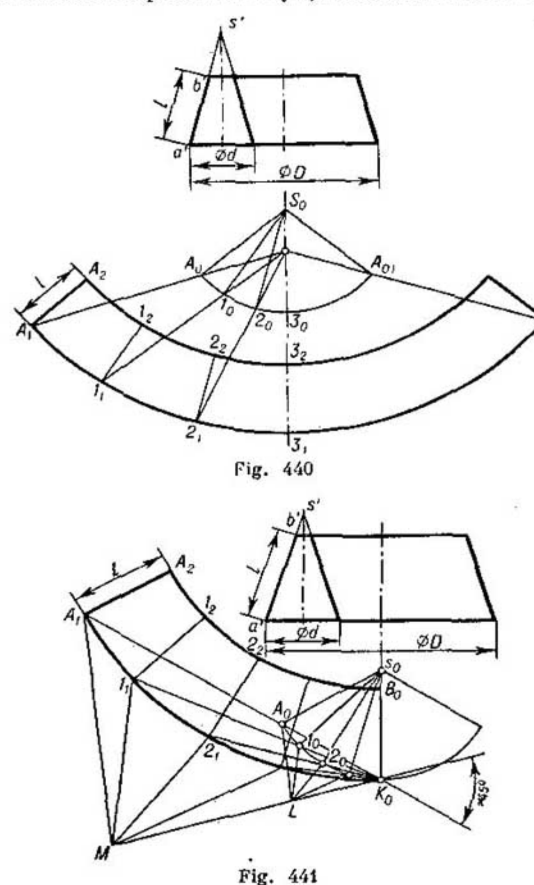


Fig. 440

Fig. 441

LA_0, $L1_0$, $L2_0$, ..., y por el punto M, las rectas $MA_1 \| LA_0$, $M1_1 \| L1_0$, ... En la intersección de estas rectas con los rayos K_0A_0, K_01_0, ..., se obtienen los puntos $A_1, 1_1, 2_1, \ldots$, por los cuales hay que trazar $A_1A_2 \| S_0A_0$, $1_11_2 \| S_01_0$, ... y marcar $A_1A_2 = l$, $1_11_2 = l$ etc., y también $K_0B_0 = l$.

Ahora falta trazar con ayuda de la plantilla curvas por los puntos A_1, 1_1, 2_1, ... y por los puntos A_2, 1_2, 2_2, ... y construir la segunda mitad del desarrollo, simétrica a la primera con respecto de la recta S_0K_0.

§ 69. DESARROLLO CONVENCIONAL DE UNA SUPERFICIE ESFÉRICA

La superficie esférica no es desarrollable (véase § 49, p. 5). Aquí se puede hablar solamente del desarrollo convencional.

En la fig. 442 se muestra uno de los procedimientos de construcción.

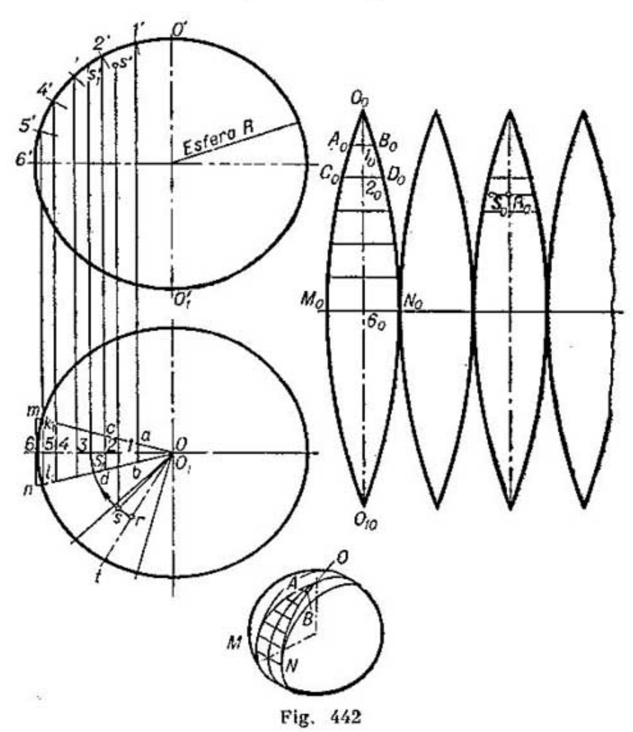


Fig. 442

1. La superficie se «corta» con planos que pasan por el eje de la esfera OO_1 (por ejemplo, en la fig. 442 en 12 partes iguales; las proyecciones frontales de las líneas de intersección no se muestran).

2. Los arcos de circunferencia en el plano H entre las divisiones, se sustituyen por rectas tangentes a la circunferencia (por ejemplo, mn sustituye al arco $k_1 6 l_1$).

3. Cada parte de la superficie esférica se sustituye por una superficie cilíndrica de revolución, cuyo eje pasa por el centro de la esfera paralelamente a la tangente a la circunferencia del círculo mayor (el radio de la superficie cilíndrica es igual al radio de la esférica).

4. Se divide el arco $o'6'o_1'$ en partes iguales: $o'1'=1'2'=2'3'$ etc. (en la fig. el arco $o'6'$ está dividido en seis partes).

5. Aceptando los puntos $1'$, $2'$, etc. como las proyecciones frontales de los segmentos de las generatrices de la superficie cilíndrica, cuyo eje es paralelo al segmento mn, se construyen sus proyecciones horizontales ab, cd, etc.

6. Sobre la recta, que pasa por los puntos M_0 y N_0, llevamos $M_0N_0=mn$ y por el centro del segmento M_0N_0 se levanta una perpendicular a este segmento.

7. Sobre esta perpendicular se lleva $6_0O_0=6_0O_{10}$; estos segmentos son respectivamente iguales a los arcos $o'6'$ y $6'o_1'$, es decir, $2\pi R : 4$.

8. Estos segmentos se dividen en partes, iguales respectivamente a los arcos $o'1'$, $1'2'$, ..., y por los puntos 1_0, 2_0, ... se trazan rectas paralelas a M_0N_0, llevando sobre ellas $A_0B_0=ab$, $C_0D_0=cd$, etc.

9. Se trazan curvas por los puntos O_0, A_0, C_0, ... y por los puntos O_0, B_0, D_0, ... auxiliándose de la plantilla.

Como resultado se obtiene el desarrollo aproximado de un pétalo de la superficie esférica.

Si hace falta marcar en el desarrollo un punto, por ejemplo, el S (s', s), entonces, en la proyección horizontal, se traza primero la recta ot, que divide por la mitad al segmento en el que se encuentra la proyección s, y el arco de radio os. Luego, el punto s se lleva al meridiano principal y se halla la proyección s_1'. A continuación, en el desarrollo de la tercera división se traza, a partir de su vértice, el segmento igual al arco $o's_1'$, se traza por R_0 una recta paralela a M_0N_0 a la cual se lleva $R_0S_0=rs$.

§ 70. EJEMPLOS DE CONSTRUCCIÓN DEL DESARROLLO DE ALGUNAS FORMAS

1. La superficie representada en la fig. 443 representa una combinación de las superficies de un prisma y de un cilindro oblicuo con base circular.

Para desarrollar la superficie de un cilindro oblicuo, dividimos la semicircunferencia en partes iguales con los puntos 1, 2, 3, ..., por los cuales trazamos las generatrices. Las proyecciones frontales de estas generatrices son iguales a los segmentos de las mismas. Por el punto $1'$ trazamos la traza del plano proyectante frontal T, que da en la intersección con el cilindro su sección normal. Sobre la recta 4_04_0 llevamos los segmentos 4_0E_0, 4_0D_0, 4_0C_0, iguales a las proyecciones frontales $4'e'$, $4'd'$, $4'c'$. Por E_0, D_0 y C_0 trazamos rectas perpendiculares a la recta 4_04_0. Ahora, desde el punto 4_0 como centro, describimos un arco de radio igual a la cuerda $4-3$, intersecando con éste a la recta trazada por el punto C_0; obtenemos el punto 3_0, desde el cual trazamos a su vez un arco del mismo radio, intersecando con él la recta trazada por el punto D_0, y desde el punto obtenido 2_0 intersecamos la recta trazada por el punto E_0, con un arco del mismo radio.

La construcción indicada se basa en el desarrollo de los elementos de la superficie, que se proyectan sobre el plano en forma de triángulos. Examinemos en el plano V uno de estos triángulos $1'k'2'$. El cateto $k'2'$ representa un segmento de la generatriz, que se proyecta en verdadera magnitud, la hipotenusa $1'2'$ es la proyección del arco de una semicircunferencia, y el cateto $1'k'$ es la proyección de una parte de elipse, que se obtiene como sección normal de la superficie cilíndrica dada. En el curso del desarrollo hay que construir un triángulo rectángulo

con ayuda del cateto $2'k'$ y la hipotenusa, en calidad de cual se toma la cuerda $1-2$.

Una vez determinada la posición de los puntos 1_0, 2_0, 3_0, trazamos por estos puntos y por el punto 4_0 una curva que se toma como el desarrollo del arco de la circunferencia [1]; trazando $1_0 1_0$, $2_0 2_0$, ..., obtenemos los puntos para la curva que es el desarrollo del arco inferior de la circunferencia. En los puntos 1_0 y 1_0 trazamos líneas rectas tangentes a las curvas construidas. Lo demas está claro del dibujo.

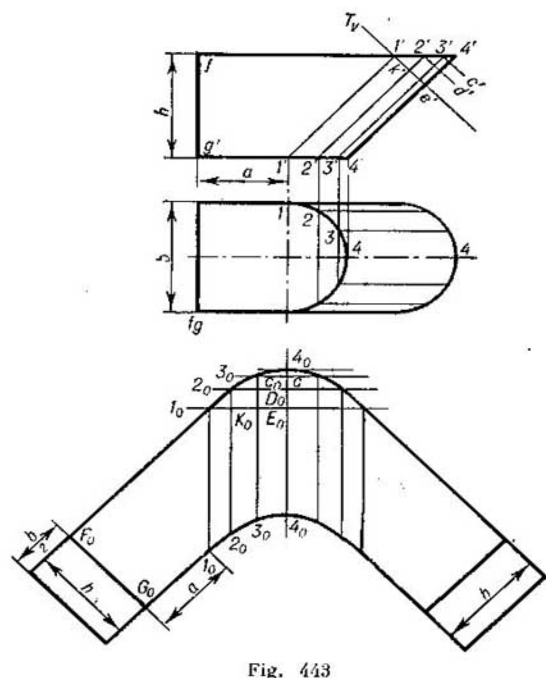


Fig. 443

2. En la fig. 444 se muestra el desarrollo de la parte de transición, que une dos cilindros. Esta parte de transición está delimitada por las superficies de dos cilindros oblicuos del mismo tipo que en la fig. 443, y por dos planos.

Comenzamos el desarrollo con la recta AB: construimos el triángulo $A_0B_01_0$ igual al triángulo $a'b'1'$, añadimos a éste el desarrollo de la superficie cilíndrica (este desarrollo se ha efectuado análogamente a cómo se hizo en la fig. 443), luego dibujamos el triángulo $1_01_01_0$ igual al triángulo $1'1'1'$, etc.

3. En la fig. 445 viene dado el desarrollo de la superficie lateral de un cono truncado elíptico.

[1] En la fig. 443 está construida la mitad del desarrollo.

Una vez hallado el vértice del cono (s', s), dividimos la elipse superior con los puntos *1*, *2*, ... Las generatrices trazadas desde el punto S en los puntos *1*, *2*, ..., dividen la superficie del cono en partes. Estas partes se desarrollan en forma de triángulos. Por ejemplo, la parte SCD de la superficie cónica se ha desarrollado

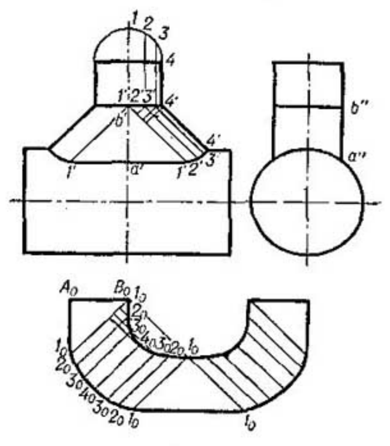


Fig. 444

en el triángulo $S_0C_0D_0$, en el que los lados S_0D_0 y S_0C_0 son iguales a las generatrices SD y SC (la longitud de la generatriz SC se ha determinado por el método de giro), y el lado C_0D_0 se ha tomado como el segmento de una recta, igual al arco desarrollado cd (mediante su división en partes pequeñas).

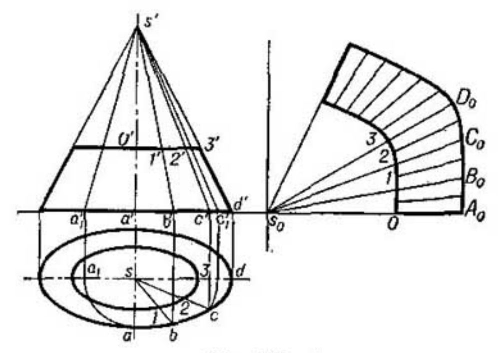


Fig. 445

Hallando los puntos C_0, B_0, A_0 y los puntos situados simétricamente a éstos respecto de la generatriz S_0D_0, trazamos una curva (el desarrollo de la elipse inferior), y marcando D_0**3**, C_0**2**, etc., iguales a las longitudes de los segmentos de las generatrices D**3**, C**2**, etc., hallamos una curva que es el desarrollo de la elipse superior. En la fig. 445 se da la mitad de todo el desarrollo

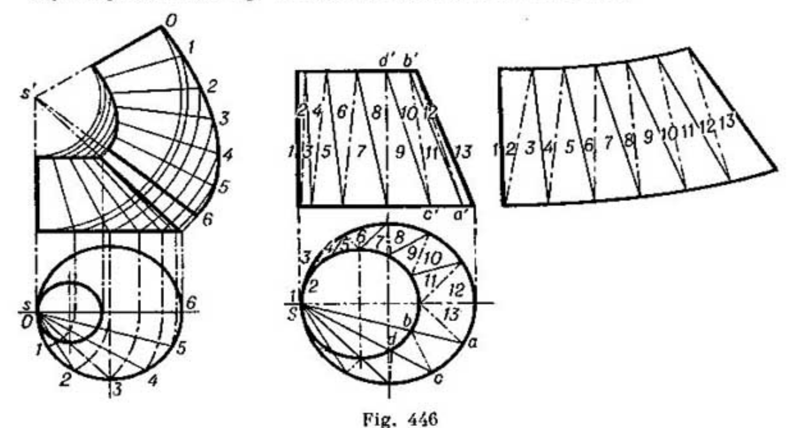


Fig. 446

4. En la fig. 446 se muestra el desarrollo de la superficie lateral de un cono truncado oblicuo con base circular. A la izquierda se muestra el desarrollo efectuado análogamente al de la fig. 445. A la derecha se muestra otro procedimiento: la superficie dada se ha sustituido por una superficie poliédrica inscrita en ella.

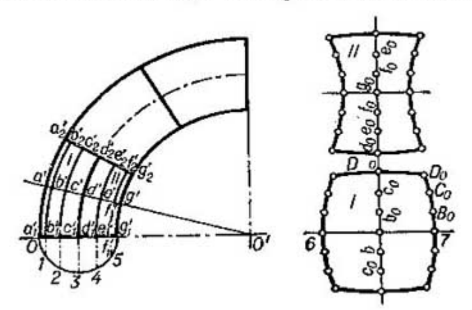


Fig. 447

Valiéndonos de la proyección horizontal del vértice del cono (el punto s), realizamos primero la división de la proyección horizontal trazando rectas desde este punto. Trazando, por ejemplo, la recta sa, obtenemos la proyección ab del seg-

mento de la generatriz. Con ayuda de los puntos en la proyección horizontal obtenemos la división de la proyección frontal. Luego, examinamos, por ejemplo, el elemento plano $ACDB$, trazamos en éste la diagonal BC y determinamos las longitudes de los segmentos para la construcción de los triángulos; uno de los lados de cada triángulo es la cuerda de la circunferencia correspondiente de la proyección horizontal. El desarrollo se compone de semejantes triángulos; las líneas quebradas se sustituyen por curvas suaves trazadas por los vértices de las quebradas.

5. En la fig. 447 se muestra la construcción del desarrollo de un anillo circular. En la proyección está representado un codo, o sea, 1/4 del anillo circular; en el desarrollo se representa la superficie de un tercio de este codo.

Se ha trazado la recta $o'a'$, que es el eje de simetría de la proyección de la parte examinada del codo. Con esto se determina una circunferencia (la sección normal) cuyo desarrollo, en forma de la recta D_0D_0, se toma como la línea media de la figura del desarrollo de la sección examinada del anillo. Correspondientemente a las divisiones 1, 2, ..., en esta sección, se han trazado desde el punto o' arcos concéntricos. La construcción del desarrollo se realiza para la I y II partes por separado. Para la primera parte marcamos el segmento D_0D_0 igual por su longitud a la mitad de la circunferencia de la sección normal, y lo dividimos en partes correspondientemente a las divisiones iniciales 1, 2, ... En el punto A_0 levantamos una perpendicular a D_0D_0 y llevamos sobre ella, a ambos lados del punto A_0, los segmentos A_06 y A_07 iguales a los arcos $a'a_1'$ y $a'a_2'$. Para determinar el punto B_0 en el desarrollo trazamos desde el punto b_0 un arco de radio igual a la longitud del arco $b'b_2'$, y desde el punto 7, un arco de radio igual al segmento a_1' 1. Del mismo modo procedemos para la construcción de los puntos C_0, D_0 y otros.

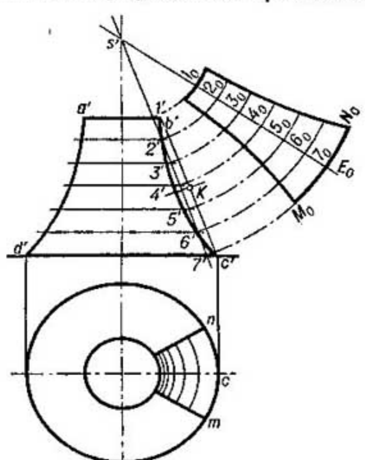


Fig. 448

Análogamente construimos el desarrollo de la II parte del codo.

6. En la fig. 448 se muestra la construcción del desarrollo de una superficie de revolución con generatriz curvilínea.

Realizamos el desarrollo dividiendo la superficie primero en partes iguales por medio de los meridianos. En en dibujo se muestra el desarrollo de una sexta parte.

Trazamos la cuerda $b'c'$, la dividimos por la mitad, y en el punto de división K levantamos una perpendicular hasta su intersección con el arco $b'c'$. El segmento obtenido de esta perpendicular, desde el punto K hasta el arco, lo dividimos por la mitad y por el punto de división trazamos una recta paralela a la cuerda $b'c'$. Dividimos el segmento $1'7'$ en cierto número de partes iguales entre sí y por los puntos de división trazamos planos horizontales, que dan en la intersección con la superficie de revolución paralelos. La construcción del desarrollo se comienza con la línea media (la recta $s'E_0$). Sobre la recta $s'E_0$ se han llevado los segmentos 1_02_0, 2_03_0, ..., iguales correspondientemente a los segmen-

tos $1'2'$, $2'3'$, ..., trazando arcos desde el punto s' de radios $s'1'$, $s'2'$, ... Sobre estos arcos, a partir de los puntos 1_0, 2_0, ..., trazamos las longitudes de los arcos de las proyecciones horizontales de los paralelos de la parte de la superficie que se desarrolla (por ejemplo, $7_0M_0=cm$ y $7_0N_0=cn$).

PREGUNTAS AL CAPÍTULO XI

1. Indiquen los procedimientos de construcción de los desarrollos de las superficies cilíndricas y cónicas.
2. ¿Cómo construir el desarrollo de la superficie lateral de un cono truncado, si este cono no se puede construir hasta un cono completo?
3. ¿Cómo construir el desarrollo convencional de una superficie esférica?

XII

CAPÍTULO

PROYECCIONES AXONOMÉTRICAS

§ 71. CONOCIMIENTOS GENERALES

En muchos casos, al ejecutar dibujos industriales surge la necesidad de tener, a la par con la representación de los objetos en el sistema de proyecciones ortogonales, representaciones más intuitivas. Para construir tales representaciones se emplean las proyecciones llamadas *axonométricas* o, abreviadamente, *axonometría*. La denominación de «axonometría» se ha formado de las palabras de la lengua antigua griega: *axon* — eje, y *metreo* — mido.

El método de proyección axonométrica reside en que la figura dada, junto con los ejes coordenados rectangulares, a los cuales este sistema de puntos está referido en el espacio, se proyecta ortogonalmente sobre cierto plano [1]. Por consiguiente, la proyección axonométrica es, ante todo, una proyección sobre un solo plano, y no sobre dos y más, como esto tenía efecto en el sistema de proyecciones ortogonales. Al mismo tiempo, es necesario asegurar la claridad de las representaciones y la posibilidad de efectuar la determinación de las posiciones y las dimensiones, como se expone más abajo.

En la fig. 449 se muestra el esquema de proyección del punto A sobre cierto plano P, aceptado como *plano de proyección axonométrica* (llamado también *plano de la imagen*). La dirección de proyección se indica con la flecha [2].

---

[1] La axonometría puede ser también central; aquí se examina la axonometría paralela.

[2] La dirección de proyección puede formar con el plano de proyecciones axonométricas un ángulo agudo o un ángulo recto. Para asegurar la claridad de las representaciones la dirección de proyección no se debe tomar paralela a ninguno de los planos coordenados.

Las rectas Ox, Oy, Oz representan los ejes coordenados en el espacio, las rectas O_px, O_py, O_pz son sus proyecciones sobre el plano P, llamadas *ejes axonométricos* (o ejes de coordenadas axonométricas).

En los ejes x, y, z se ha marcado cierto segmento de longitud l, aceptado como unidad de medición por estos ejes (*unidad natural*). Los segmentos l_x, l_y, l_z en los ejes axonométricos representan las

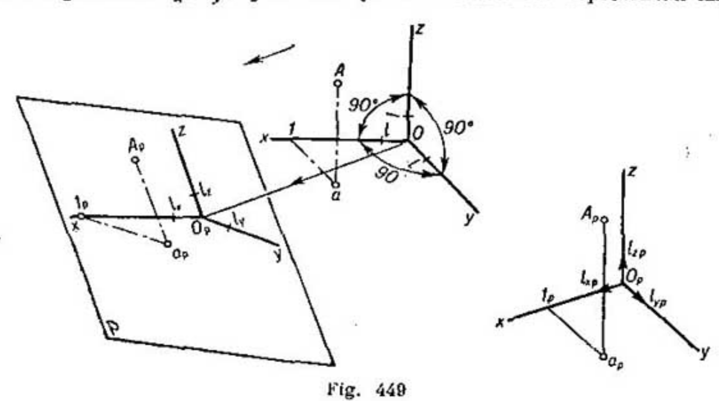


Fig. 449

proyecciones del segmento l; ellos en general no son iguales a l y no son iguales entre sí. Los segmentos l_x, l_y, l_z son unidades de medida por los ejes axonométricos, o sea, *unidades axonométricas* [1].

Las relaciones:

$$\frac{l_x}{l}, \quad \frac{l_y}{l}, \quad \frac{l_z}{l}$$

se llaman *coeficientes de reducción* (o coeficiente de distorsión) de los ejes axonométricos. Designemos el coeficiente de reducción del eje O_px por k, el del eje O_py por m, y el del eje O_pz por n.

La línea espacial de tres elementos $O1aA$ se ha proyectado en una línea plana quebrada $O_p1_pa_pA_p$ (fig. 449). El punto A_p es la *proyección axonométrica* del punto A; el punto a_p representa la proyección axonométrica del punto a, que es una de las proyecciones ortogonales del punto A, a saber: sobre el plano H (xOy). Al punto a_p se la llama *segunda proyección* del punto A. Se pueden construir dos segundas proyecciones más del punto A, correspondientes a sus otras dos proyecciones ortogonales (sobre los planos V (xOz) y W (yOz).

---

[1] Se emplean también las denominaciones de «escalas axonométricas» y correspondientemente «escala natural».

Las relaciones entre las proyecciones axonométricas de segmentos de líneas rectas paralelas a los ejes coordenados rectangulares y los propios segmentos se expresan con los coeficientes k, m, n.

Puesto que (véase la fig. 449) $a1 \| Oy$ y $aA \| Oz$, entonces, en el caso de proyección paralela, $a_p1_p \| O_py$ y $a_pA_p \| O_pz$. En la proyección paralela la relación de los segmentos paralelos se conserva; por consiguiente, a_p1_p: $l_y = a1 : l$ o bien $a_p1_p : a1 = l_y : l = m$, donde m es el coeficiente de reducción del eje O_py. Se pueden sacar conclusiones análogas también respecto a los segmentos situados paralelamente a los ejes x y z: la relación de las proyecciones de tales segmentos a los propios segmentos son iguales (respectivamente) a los coeficientes de reducción k y n.

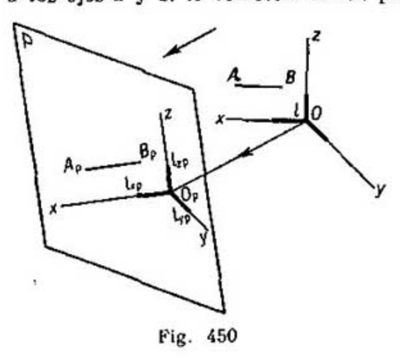


Fig. 450

Así, la relación entre la proyección axonométrica A_pB_p del segmento AB, paralelo al eje x (fig. 450), y el propio segmento es igual a $A_pB_p : AB = k$.

Cada uno de los segmentos de la línea $O1aA$ determina una de las proyecciones rectangulares del punto A; las proyecciones de estos segmentos (los segmentos de la quebrada plana $O_p1_pa_pA_p$) determinan respectivamente las *coordenadas axonométricas* del mismo punto A. Evidentemente, con auxilio de los coeficientes de reducción se puede pasar de las coordenadas rectangulares a las axonométricas, y viceversa: $x_p = kx$, $y_p = my$, $z_p = nz$, donde con las letras x_p, y_p, z_p se han designado los segmentos que determinan las coordenadas axonométricas del punto, y con las letras x, y, z, los segmentos que determinan sus coordenadas rectangulares.

En la fig. 451 se da un ejemplo de la construcción de la proyección axonométrica de un punto con ayuda de sus proyecciones ortogonales.

El punto A_p se ha construido con auxilio de los segmentos coordenados tomados del dibujo: $x = O1$, $y = a1$, $z = a'1$. Teniendo en cuenta los coeficientes de reducción k, m y n, llevamos al eje $O_p x$ el segmento $O_p1_p = k \cdot O1$, luego, paralelamente al eje O_py, trazamos el segmento $1_pa_p = m \cdot a1$ y, finalmente, trazamos el segmento $a_pA_p = n \cdot a'1$ paralelamente al eje O_pz.

El plano Q (fig. 452) está representado por sus trazas y en la proyección axonométrica. Para construir las trazas se han tomado los puntos de intersección de las mismas con los ejes con ayuda de los segmentos en los ejes (por ejemplo, el punto Q_{xp} se ha construido con ayuda del segmento $OQ_x : O_pQ_{xp} = k \cdot OQ_x$).

El punto A situado en el plano Q se ha construido en la proyección axonométrica con ayuda de sus coordenadas; la horizontal N_pA_p deberá ser paralela a su segunda proyección y a la traza en el plano xO_py. El punto A_p se podría haber construido también como el punto de intersección de dos rectas cualesquiera en el plano Q, construyendo las proyecciones axonométricas de estas rectas.

En la misma fig. 452 viene representada la proyección axonométrica de un plano proyectante frontal y del punto B_p perteneciente a este plano. ¿Cómo determinar las coordenadas rectangulares de este punto? La construcción se muestra

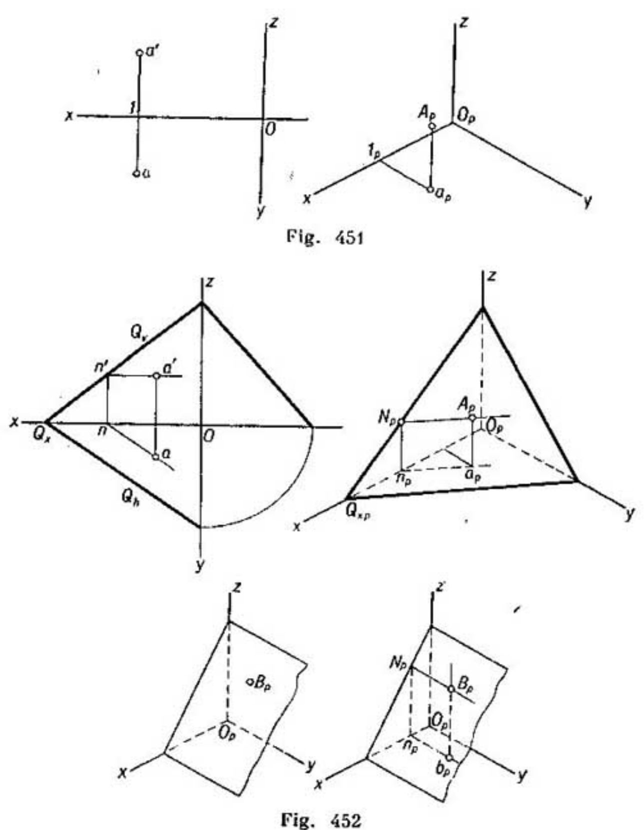


Fig. 451

Fig. 452

en la fig. 452 a la derecha: en la proyección axonométrica se ha trazado la horizontal N_pB_p y se ha construido su segunda proyección, en la que se ha obtenido la segunda proyección b_p. Las coordenadas buscadas del punto B son:

$$x = \frac{O_p n_p}{k}, \qquad y = \frac{n_p b_p}{m}, \qquad z = \frac{b_p B_p}{n},$$

donde k, m, n son los coeficientes de reducción.

Dándose los coeficientes de reducción se puede tomar el mayor de ellos igual a la unidad, lo que simplifica la construcción.

Si sobre el plano P se toman arbitrariamente cuatro puntos O_p, A_p, B_p y C_p, tres cualesquiera de los cuales no son coplanares, y se unen dos a dos con rectas, entonces se obtiene una figura llamada *cuadrilátero completo* ($O_pA_pB_pC_p$); *éste es un cuadrilátero con sus diagonales* (fig. 453, *a*). Si, luego, por estos puntos se trazan rectas paralelas entre sí y se toma en cada una de ellas un punto arbitrario O, A, B y C de modo tal, que todos ellos estén situados en distintos planos, entonces en el espacio se genera, en general, cierto tetraedro

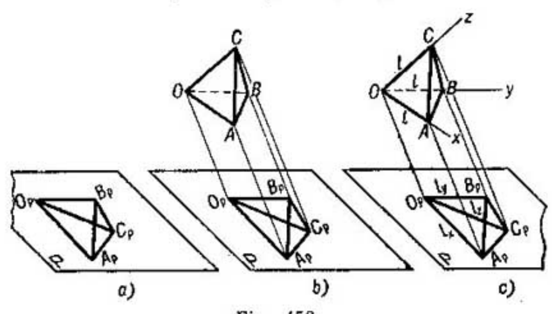


Fig. 453

$OABC$ [1]. Obviamente, en el espacio pueden haber una infinidad de tetraedros, como proyecciones paralelas de los cuales puede servir el cuadrilátero completo $O_pA_pB_pC_p$. Entre ellos existe un tetraedro con un ángulo triédrico recto en el punto O y con aristas iguales OA, OB, OC; a tal tetraedro se le puede considerar como *de escala*, es decir, las tres aristas iguales y perpendiculares entre sí de este tetraedro sirven de escalas de los ejes coordenados en el espacio (fig. 453, *b*). Esto forma el contenido del *teorema principal de la axonometría*, expuesto en la siguiente formulación: *todo cuadrilátero completo en un plano es siempre la proyección paralela de cierto tetraedro de escala*. Por esta razón, tres rectas cualesquiera que pasen por un punto del plano y que no se confundan, pueden ser tomadas como ejes axonométricos, es decir, como proyecciones de los ejes coordenados rectangulares, y tres segmentos cualesquiera trazados sobre estas rectas a partir del punto de su intersección, pueden ser tomados, en correspondencia con la proporción elegida de los coeficientes de reducción, en calidad de escalas axonométricas [2].

---

[1] En el caso dado, el tetraedro es una pirámide triangular de forma arbitraria.

[2] «El teorema principal de la axonometría» fue formulado por K. Polke (en el año 1851) en forma del siguiente teorema: *tres segmentos cualesquiera que*

Si los tres coeficientes de reducción son iguales entre sí ($k=$ $=m=n$), la proyección axonométrica se llama *isométrica*; si son iguales entre sí sólo dos coeficientes de reducción (por ejemplo, $k=n$, pero m no es igual a k, o bien $k=m$, pero n no es igual a k), la proyección se llama *dimétrica* o *monodimétrica*; finalmente, si $k\neq m$, $k\neq n$, $m\neq n$, la proyección se llama *trimétrica* o *anisométrica*[1].

Si la dirección de proyección no es perpendicular al plano P, entonces la proyección axonométrica se llama *oblicua*. En el caso contrario, la proyección axonométrica se llama *rectangular* u *ortogonal*.

Para comparar estas dos proyecciones imaginémonos una esfera en las proyecciones axonométricas ortogonal y oblicua. En el primer caso, las generatrices de la superficie proyectante cilíndrica, que envuelve a la esfera, son perpendiculares al plano de proyección axonométrica; y puesto que el cilindro proyectante es un cilindro de revolución, *la proyección axonométrica ortogonal de la esfera es una circunferencia.*

En el caso de la proyección oblicua en la intersección de la superficie proyectante con el plano de proyección axonométrica se obtiene una elipse; en la proyección axonométrica oblicua la representación de la esfera pierde su claridad.

En la práctica de construcción de representaciones intuitivas habitualmente se emplean solamente algunas combinaciones determinadas de dirección de los ejes axonométricos y de coeficientes de reducción.

§ 72. PROYECCIONES AXONOMÉTRICAS RECTANGULARES. COEFICIENTES DE REDUCCIÓN Y ÁNGULOS ENTRE LOS EJES

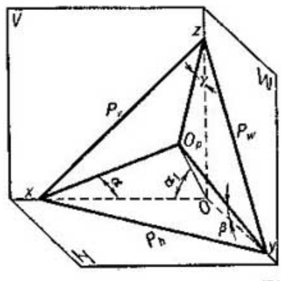
1. Tomemos el plano de proyección axonométrica de tal modo que corte a los tres ejes de coordenadas (fig. 454, a la izquierda) en los puntos X, Y, Z. En el caso de proyecciones axonométricas rectangulares el segmento OO_p es perpendicular al plano P. Los segmentos O_pX, O_pY, O_pZ (las proyecciones axonométricas de los segmentos en los ejes) son los catetos de triángulos rectángulos y los propios segmentos en los ejes de coordenadas son las hipotenusas. De

parten de un mismo punto en el plano, pueden ser tomados como las proyecciones paralelas de tres segmentos iguales y perpendiculares entre sí en el espacio. En la sexta década del siglo XIX H. Schwarz generalizó el teorema de Polke, demostrando que cualquier cuadrilátero completo en el plano siempre puede ser considerado como la proyección paralela de un tetraedro, semejante a cualquier dado.

[1] De la palabra del idioma griego antiguo «isos» — igual; la proyección isométrica es la proyección de iguales coeficientes de reducción de los tres ejes; «di» — doble; la proyección dimétrica es la proyección de iguales coeficientes de reducción de dos ejes; «treis» — tres; la proyección trimétrica es la proyección de desiguales coeficientes de reducción de los tres ejes.

aquí $O_pX : OX=\cos\alpha$, $O_pY : OY=\cos\beta$, $O_pZ : OZ=\cos\gamma$. Pero estas relaciones representan los coeficientes de reducción k, m y n. Por consiguiente, $k=\cos\alpha$, $m=\cos\beta$, $n=\cos\gamma$. Para el segmento OO_p los cosenos de los ángulos α_1, β_1, γ_1 (fig. 454, a la derecha), suplementarios a los ángulos α, β y γ, son los *cosenos directores*.

Por esta razón, $\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1$ [1], y puesto que $\alpha=\frac{\pi}{2}-\alpha_1$, etc., entonces, $\text{sen}^2\alpha+\text{sen}^2\beta+\text{sen}^2\gamma=1$, es decir, $1-\cos^2\alpha+1-\cos^2\beta+1-\cos^2\gamma=1$, de donde $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2$.



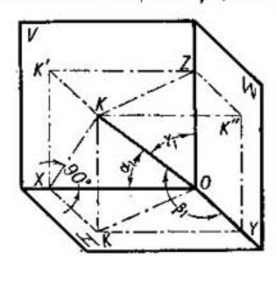


Fig. 454

Por consiguiente, $k^2+m^2+n^2=2$, es decir, *para la proyección axonométrica rectangular la suma de los cuadrados de los coeficientes de reducción es igual a dos.*

2. Proyección isométrica [2]. Puesto que $k=m=n$, entonces $3k^2=2$, de donde

$$k=\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}82.$$

[1] Les recordamos la deducción de esta relación (fig. 454, a la derecha): $OK^2=OX^2+OY^2+OZ^2$; pero $OX=OK\cdot\cos\alpha_1$, $OY=OK\cos\beta_1$ y $OZ=OK\cos\gamma_1$, de donde $OK^2=OK^2\cos^2\alpha_1+OK^2\cos^2\beta_1+OK^2\cos^2\gamma_1$ y (después de simplificar por OK^2) $1=\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1$.

[2] El término «proyecciones isométricas» fue propuesto por primera vez en el año 1820 en las conferencias de W. Farich dadas en Cambridge (Inglaterra). En estas conferencias Farich expuso la teoría de las proyecciones isométricas; él empleó estas proyecciones en la técnica y las popularizó ampliamente. En el idioma ruso los datos acerca de las proyecciones isométricas rectangulares fueron expuestos por primera vez en el artículo del profesor del Instituto de ingenieros de vías de comunicación de San Petersburgo A. J. Reder (1809—1872) en el año 1855. Una exposición más profunda del problema acerca de la proyección isométrica como caso particular de las proyecciones axonométricas rectangulares fue dada por N. I. Makárov y, luego, por V. I. Kurdiúmov, que en general dedicó a las proyecciones axonométricas toda una serie de trabajos. V. I. Kurdiúmov propuso emplear un papel especial con una red de líneas rectas trazadas en él, que corresponden a las direcciones de los ejes en la proyección isométrica. La idea sobre tal papel para ejecutar en él esbozos en proyección isométrica se la dictó a Kurdiúmov su práctica de ingeniero.

Esto significa que en la proyección isométrica rectangular, en cada eje (o en cada recta paralela a estos ejes) se obtiene una reducción igual aproximadamente a 0,82.

3. **Proyección dimétrica.** Dos coeficientes de reducción son iguales entre sí, y el tercero no es igual a éstos. Si se toma $k=n$ y se elige $m=\frac{1}{2}k$, obtendremos:

$$2k^2+\frac{1}{4}k^2=2, \quad k=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx 0,94.$$

Por consiguiente, en la proyección dimétrica rectangular, en dos ejes (en el caso dado en los ejes O_px y O_pz) o en dos rectas paralelas a estos ejes, se obtiene una reducción igual aproximadamente a 0,94, y en el tercer eje (en el caso dado en el eje O_py) se obtiene una reducción de $\approx 0,47$.

4. El plano de proyección axonométrica, al cortar al plano de coordenadas, forma un triángulo llamado *triángulo de trazas*.

Demostremos que *en las proyecciones axonométricas rectangulares, los ejes axonométricos son las alturas del triángulo de trazas.*

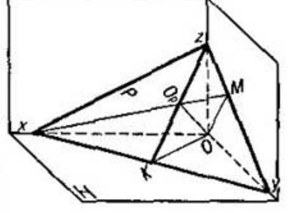


Fig. 455

Efectivamente, (fig. 455), si $OO_p\perp P$, entonces $OK\perp XY$ y de acuerdo con el teorema de tres perpendiculares $ZK\perp XY$. Análogamente $XM\perp YZ$. El punto O_p es el punto de intersección de las alturas (el *ortocentro*) del triángulo de trazas.

Luego, *en las proyecciones axonométricas rectangulares el triángulo de trazas es acutángulo.*

En efecto, en este caso el ortocentro está situado dentro de este triángulo, y tal disposición del ortocentro es propia solamente del triángulo acutángulo.

De esto se deriva que los ángulos XO_pZ, XO_pY y YO_pZ son obtusos. En efecto, dado que el triángulo de trazas es acutángulo, el ángulo entre las alturas complementa al ángulo agudo hasta 180°, por ejemplo, $\angle MO_pK=180°-\angle XO_pK$; pero el $\angle XO_pK$ es agudo, por lo tanto, el $\angle MO_pK$ será obtuso.

Pero esto no quiere decir que en la proyección axonométrica rectangular se puede emplear sólo tal esquema de disposición de los ejes, como el endicado, por ejemplo, en la fig. 456, *a*. Supongamos que el eje x ha sido prolongado a partir del punto O_p a la derecha y hacia arriba y el eje y se ha prolongado a partir del punto O_p a la izquierda y hacia arriba. En este caso el ángulo formado por los

ejes prolongados x e y se conserva obtuso, pero los ángulos formados con el eje z resultan agudos. Sin embargo, no es difícil establecer que en la proyección axonométrica rectangular la elección de los ejes está limitada, a saber: *es necesario que el ángulo obtuso formado por dos ejes esté dividido por la prolongación del tercer eje, y que el ángulo agudo formado por dos ejes no pueda ser dividido por la prolongación del tercer eje.*

5. Supongamos que sean dados los ejes para la proyección axonométrica rectangular (fig. 456, *a*). Hace falta *determinar los coeficientes de reducción para la disposición dada de los ejes.*

Ante todo construimos cierto triángulo en el que las alturas están dirigidas respectivamente en dirección paralela a los ejes dados (fig. 456, *b*). Este triángulo desempeña el papel de triángulo de trazas. El ángulo XO_pY se ha obtenido como proyección del ángulo recto formado por los ejes x e y en el espacio. Valiéndonos del método de abatimiento hagamos coincidir ambos ángulos con el plano del dibujo: $\angle XO_pY$ y $\angle XOY$, girando el $\angle XOY$ alrededor de la recta

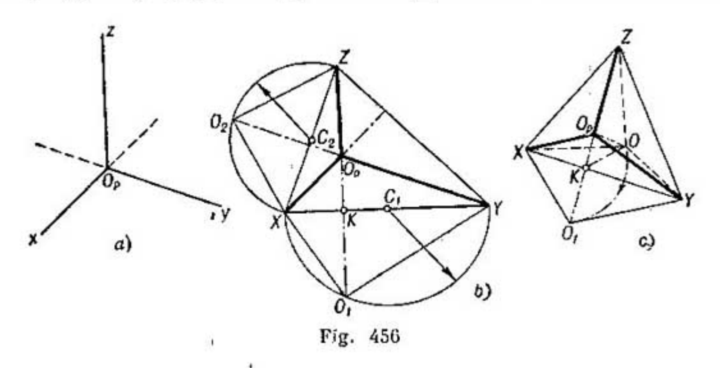


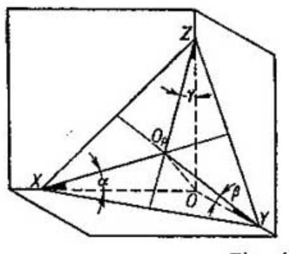
Fig. 456

XY hasta hacerlo coincidir con el plano P (fig. 456, *c*). En la fig. 456, *b* se muestra que dividiendo con el punto C_1 la recta XY por la mitad y trazando desde este punto como centro una semicircunferencia de radio C_1X, podemos proyectar el punto O_p perpendicularmente a XY sobre la semicircunferencia. El punto O_1 es el vértice del ángulo recto formado por los ejes x e y en el espacio después del giro.

Ahora, los coeficientes de reducción buscados se determinan de las relaciones $O_pX : O_1X = k$ y $OY : O_1Y = m$. Para determinar el coeficiente n se puede emplear la fórmula $k^2+m^2+n^2=2$, o bien construir una semicircunferencia tomando XZ como diámetro, y tomar la relación $O_pX : O_2X = n$.

6. Más arriba (pag. 335) fueron deducidos los valores de los coeficientes de reducción para las proyecciones rectangulares isométrica y dimétrica. *Valiéndonos de estos valores de los coeficientes de reducción se puede determinar la magnitud de los ángulos formados por los ejes de estas proyecciones axonométricas rectangulares con ayuda de los triángulos de trazas* [1].

Proyección isométrica (fig. 457). Examinamos la proyección rectangular; por consiguiente, la recta OO_p es perpendicular al plano en el que está situado el triángulo de trazas.



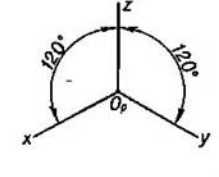


Fig. 457

En la proyección isométrica, los coeficientes de reducción son iguales entre sí: $k=m=n$; por consiguiente, $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$ y $\alpha=\beta=\gamma$ (los ángulos son agudos).

De esto se desprende que el triángulo de trazas, para la proyección isométrica, es equilátero. Y de esto se deriva que en el triángulo de trazas, cada uno de los ángulos XO_pZ, XO_pY y YO_pZ es igual a 120°.

Así pues, para la proyección isométrica se obtiene la disposición de los ejes indicada en la fig. 457 a la derecha.

El plano de proyección isométrica, que corta a los semiejes positivos x, y, z, se representa en el sistema de proyecciones ortogonales así como se muestra en la fig. 458, *a*. Este plano forma con cada uno de los planos de coordenadas un ángulo $\delta\approx 55°$, más exactamente, 54°45'.

Evidentemente, los planos, cuya posición es semejante a la de los planos indicados en la fig. 458, *c*, y las figuras situadas sobre ellos se representan en la proyección isométrica en forma de una línea recta.

Proyección dimétrica. Aquí, dos de los tres coeficientes de reducción son iguales entre sí; examinaremos el caso cuando $k=n$, $k=2m$.

[1] Más exactamente, con ayuda de triángulos *semejantes* a los triángulos de trazas. La construcción de los ejes en la proyección axonométrica rectangular con ayuda de los coeficientes de reducción dados. en general, se puede realizar a base del teorema de Weisbach: «En la proyección axonométrica rectangular, los ejes axonométricos son las bisectrices de los ángulos del triángulo, cuyos lados son proporcionales a los cuadrados de los coeficientes de reducción».

En este caso, el ángulo entre los ejes axonométricos O_pz y O_py deberá ser igual a 131° 25′, y el eje O_px forma con la perpendicular al eje O_pz un ángulo de 7°10′.

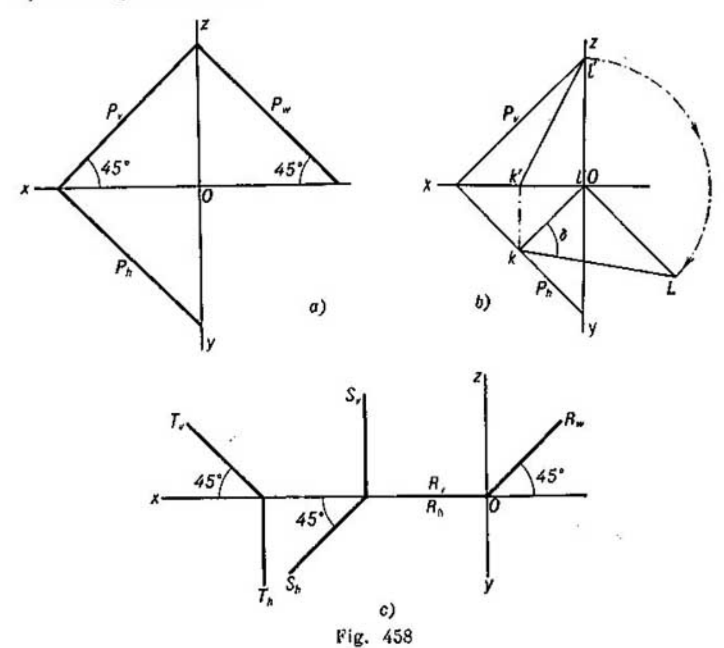


Fig. 458

Demostremos esto. Sea $k=n$ y, por consiguiente, $\alpha=\gamma$ y $OX=OZ$ (fig. 457, a la izquierda). Aceptando el segmento OX como unidad, obtenemos que $XZ=\sqrt{2}$. Examinando la proyección dimétrica en la que $k=n=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ y $m=\frac{\sqrt{2}}{3}$, podemos escribir que $O_pX=O_pZ=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Puesto que $OX=OZ$, entonces $XY=ZY$, es decir, el triángulo XYZ en este caso es isósceles.

En este triángulo (fig. 459) la altura YK divide al lado XZ por la mitad, o sea,

$$XK=KZ=\frac{XZ}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Del exámen del triángulo rectángulo O_pKZ se desprende:

$$\operatorname{sen}\delta=\frac{ZK}{O_pZ}=\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{2\sqrt{2}}{3}=0,75.$$

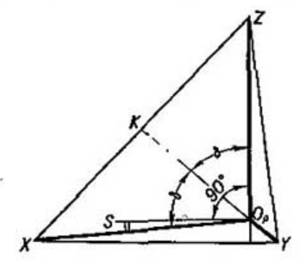
El ángulo $\delta \approx 48°35'$; $2\delta = 97°10'$. En la figura se ve que el $\angle SO_pX \approx 7°10'$, puesto que $O_pS \perp O_pZ$.

Luego, observamos que

$$\angle KO_pS \approx 48°35' - 7°10' = 41°25'.$$

Así pues, hemos obtenido la disposición de los ejes, indicada en la fig. 459 a la derecha, para la proyección dimétrica, en la cual los coeficientes de reducción forman la proporción 1: 0,5 : 1.

Se puede construir el eje O_px tomando tg 7°10′ igual a 1/8, y el eje O_py, tomando tg 41°25′ igual a 7/8. *El eje O_py puede ser trazado*



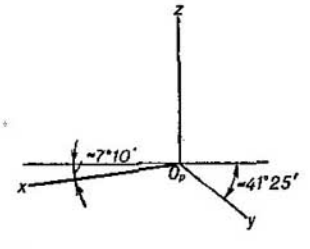


Fig. 459

también valiéndose de otro procedimiento, a saber: como la prolongación de la bisectriz del ángulo zO_px (véase la fig. 459, a la izquierda). *Este procedimiento es más preferente.*

Si el plano de la proyección dimétrica examinada por nosotros, que corta a los semiejes positivos x, y, z, se representa en el sistema de proyecciones ortogonales, se obtiene el dibujo mostrado en la fig. 460, *a*, con la particularidad de que el ángulo $\mu \approx 20°40'$ ($OP_y : OP_x = \text{tg}\ \mu \approx 0,377$).

Así pues, si el plano de proyección dimétrica se representa en el sistema de proyecciones ortogonales, entonces hay que trazar (véase la fig. 460, *a*) $OP_z = OP_x$ y $OP_y \approx 0,377 \cdot OP_x$ o bien, redondeando, $0,4 \cdot OP_x$.

Evidentemente, los planos situados semejantemente a los señalados en la fig. 460, *c*, y las figuras pertenecientes a estos planos se representan en la proyección dimétrica en forma de una línea recta.

Los segmentos dispuestos paralelamente a los ejes de coordenadas en el espacio, sufren en la proyección axonométrica una reducción expresada por los respectivos coeficientes de reduccion. Pero entre los segmentos dispuestos en el espacio, existen tales, cuya dimensión no varía al ser proyectados en el sistema axonométrico. Estos son los segmentos dispuestos en el espacio paralelamente a cualquiera de los lados del triángulo de trazas. En efecto, todo segmento dispuesto, por ejemplo, paralelamente a la traza XY (fig. 457, a la izquierda), incluyendo el propio segmento XY, conserva también

su magnitud en la proyección axonométrica. Pero en la proyección axonométrica rectangular estos segmentos resultan dispuestos perpendicularmente a los ejes axonométricos, como rectas paralelas a los lados del triángulo de trazas.

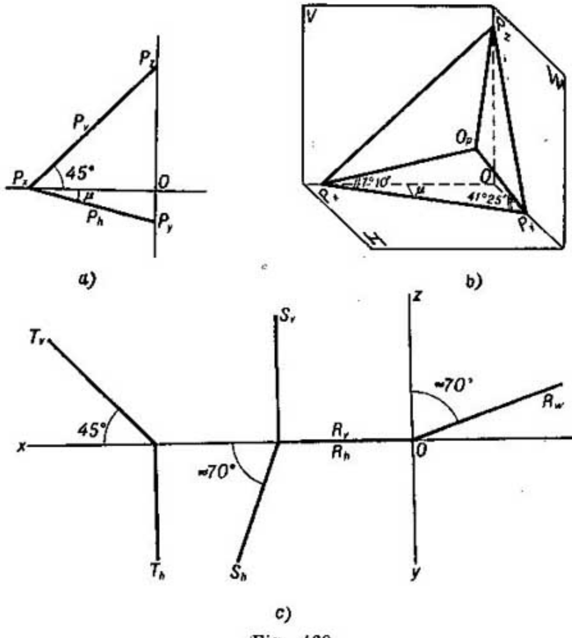


Fig. 460

Nos limitaremos a examinar las dos proyecciones axonométricas rectangulares indicadas: *la isométrica* y *la dimétrica* con la proporción de los coeficientes de reducción 1 : 0,5 : 1 y los ejes dispuestos así como se indica en la fig. 459. En lo sucesivo, al emplear la denominación de proyecciones *isométrica* y *dimétrica*., tendremos en cuenta precisamente estas proyecciones axonométricas rectangulares estudiadas por nosotros.

En la práctica de construcción de las proyecciones indicadas se admiten las siguientes divergencias:

1) en la proyección isométrica, *en la mayoría de los casos, no se emplean los coeficientes de reducción iguales a* $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ($\approx$0,82), sino que se toman iguales a la unidad;

2) en la proyección dimétrica *por lo general no se emplean los coeficientes de reducción iguales a* $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ($\approx$0,94) y a $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ($\approx$0,47), sino que se toman iguales a 1 y 0,5 respectivamente.

La sustitución de los valores de los coeficientes de reducción naturales por números más cómodos representa una comodidad considerable en la construcción práctica. El aumento de las representaciones que se obtiene con esto, menos notable en la proyección dimétrica que en la isométrica, puede ser inaceptable sólo en casos particulares de construcción; entonces, se deben emplear los coeficientes de reducción naturales.

El alargamiento de los segmentos en la proyección isométrica, construida según los coeficientes de reducción redondeados, se expresa por la relación $1:\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 1,22$, y en la proyección dimétrica, por la relación $1:\frac{2\sqrt{2}}{3}\approx 1,06$.

Por ejemplo, los segmentos paralelos en el espacio a los lados del triángulo de trazas y, por consiguiente, trazados en la proyección axonométrica en direcciones perpendiculares a los ejes axonométricos, se alargan en la proyección isométrica 1,22 veces en comparación con su magnitud verdadera, y en la proyección dimétrica, 1,06 veces.

§ 73. CONSTRUCCIÓN DE LA PROYECCIÓN AXONOMETRICA RECTANGULAR DE UNA CIRCUNFERENCIA

1. Comencemos con el problema general: *construir la proyección axonométrica rectangular de una circunferencia situada en cierto plano de posición general Q.*

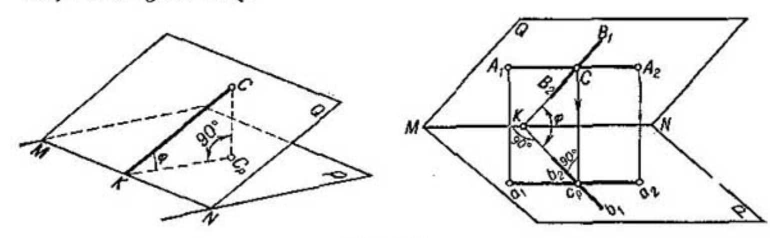


Fig. 461

Si el plano Q forma con el plano de proyección axonométrica P un ángulo agudo φ (fig. 461), entonces la proyección axonométrica de la circunferencia representa una *elipse*. El eje mayor de esta elipse

es la proyección del diámetro de la circunferencia, paralelo a la recta MN de intersección de los planos Q y P; el eje menor de la elipse será la proyección del diámetro de la circunferencia, situado perpendicularmente a la recta MN, o sea, situado sobre la línea que determina la inclinación del plano Q con respecto al plano P. Si el punto C es el centro de la circunferencia situada sobre el plano Q, entonces el eje menor de la elipse, al proyectar esta circunferencia sobre el plano P, estará situado sobre la recta C_pK. La dimensión del eje menor de la elipse dependerá de la magnitud del ángulo φ formado por los planos Q y P; si (fig. 462) el segmento CB es igual al radio (R) de la circunferencia, entonces el semieje menor de la elipse será $C_pB_p=R\cos\varphi$.

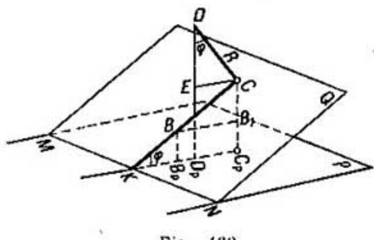


Fig. 462

2. Si $\varphi=0°$, entonces $C_pB_p=R$: el plano Q_1 (fig. 463) es paralelo al plano de proyección axonométrica P, y la proyección axonométrica de la circunferencia, situada sobre el plano Q_1, representa una *circunferencia*.

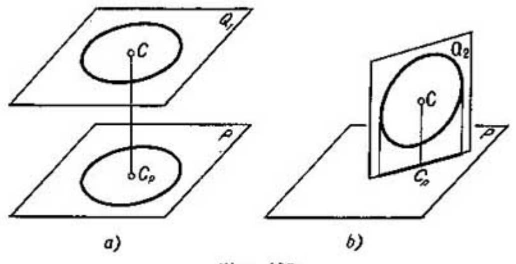


Fig. 463

Si $\varphi=90°$, entonces $C_pB_p=0$: el plano Q_2 (fig. 463) es perpendicular al plano de proyección axonométrica P, y la proyección axonométrica de la circunferencia, situada sobre el plano Q_2, representa el *segmento de una línea recta*.

En el caso cuando la circunferencia se proyecta en forma de elipse, se puede construir las proyecciones de dos cualesquiera diámetros perpendiculares entre sí. Se obtienen dos diámetros conjugados de la elipse, lo que da la posibilidad de consruir la propia elípse, y también hallar sus ejes con ayuda de estos diámetros conjugados.

3. Más abajo se examina la construcción directa de los ejes de la elipse (la proyección axonométrica rectangular de la circunferencia), lo cual se reduce a hallar la dirección y la magnitud del eje menor de la elipse.

Puesto que la magnitud del eje menor de la elipse depende sólo de la magnitud del diámetro de la circunferencia que se representa y de la magnitud del ángulo φ (véase más arriba), entonces, evidentemente, en una multitud de casos se obtendrán elipses (las proyecciones de las circunferencias) con ejes que se repiten por su magnitud. Para esto es necesario y suficiente que todas las circunferencias sean de un mismo diámetro y estén situadas sobre planos que formen con el plano de proyecciones axonométricas ángulos iguales entre sí.

Estos planos son tangentes al cono de revolución, cuyo eje es perpendicular al plano de proyección axonométrica, y cuya generatriz forma con este plano un ángulo φ. Denominemos a este cono directriz.

Por ejemplo, las circunferencias situadas sobre los planos horizontales, frontales y de perfil, se representan en la proyección isométrica en forma de elipses, el eje menor de las cuales constituye $\approx 0,58$ de la magnitud del eje mayor (véase a continuación). Pero si se toma una circunferencia en cualquier plano que forma con el plano de proyección isométrica un ángulo igual a $\approx 54°45'$, es decir, igual al ángulo que forman con el plano de proyección isométrica los planos H, V y W, entonces la relación entre las magnitudes de los ejes menor y mayor de la elipse (la proyección isométrica de la circunferencia) será también $\approx 0,58$.

Imaginémonos un tetraedro rectangular, formado por los planos de proyección y el plano de proyección isométrica, en el que está situado el cono director, cuyo vértice se encuentra en el punto O, la circunferencia de la base resulta inscrita en el triángulo de trazas, y la generatriz forma con el plano de proyección isométrica un ángulo $\varphi \approx 54°45'$ ($\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2}$). Las circunferencias situadas en planos tangentes al cono director, se representan en la proyección isométrica en forma de elipses, el eje menor de las cuales constituye $\approx 0,58$ de la magnitud del eje mayor.

Así pues, se obtiene una multitud de elipses iguales entre sí (las proyecciones axonométricas de circunferencias de un mismo diámetro) en una multitud de posiciones respecto de los ejes axonométricos.

Pero las elipses pueden repetirse no sólo por su magnitud, sino también por su posición respecto de los ejes axonométricos, es decir, se pueden obtener elipses-proyecciones iguales e igualmente orientadas, a pesar de que las circunferencias-originales no estén situadas en planos paralelos entre sí. Si nos imaginamos dos conos directrices iguales, situados sobre el plano de proyección axonométrica a ambos lados de éste, y examinamos planos tangentes a los conos directores y que tienen una traza común en el plano de proyección axonométrica (o planos paralelos a éstos), entonces las circunferencias de iguales diámetros situadas sobre estos planos se representarán en la proyección axonométrica en forma de elipses iguales e igualmente orientadas.

4. Examinemos ahora el método de construcción del eje menor de la elipse, que representa la proyección axonométrica rectangular de una circunferencia de radio R, situada sobre el plano Q que forma con el plano de proyección axonométrica P cierto ángulo agudo φ. Supongamos que desde el punto C (fig. 462) se ha trazado la perpendicular CD al plano Q. La proyección de esta perpendicular sobre el plano P se encontrará sobre la misma recta C_pK a la que pertenece el eje menor de la elipse, que es la proyección axonométrica de una circunferencia descrita en el plano Q desde el centro C.

Por consiguiente, *la proyección sobre el plano P de una perpendicular levantada al plano Q, determina la dirección del eje menor de la elipse.*

Si a partir del punto C se traza sobre esta perpendicular el segmento $CD=R$ y se construye el triángulo rectángulo CED, se puede establecer que $\triangle CED=\triangle CB_1B$ y el cateto $DE=BB_1=C_pB_p=$ $= R\cos\varphi$, es decir, es igual a la mitad del eje menor de la elipse. El segundo cateto de este triángulo (el CE) es igual a C_pD_p, o sea, es igual a la proyección del propio segmento CD sobre el plano de proyección axonométrica P.

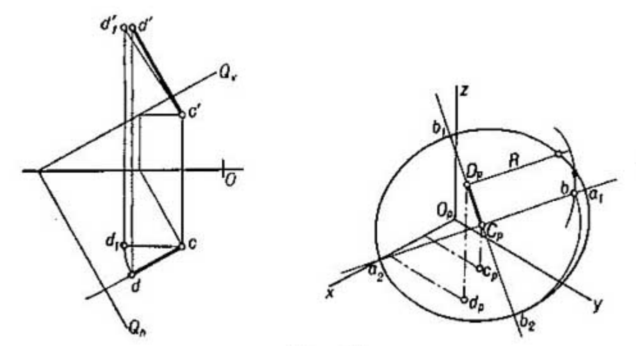


Fig. 464

Por consiguiente, la construcción de los ejes de la elipse, que representa la proyección axonométrica de una circunferencia de radio R situada sobre el plano de posición general Q, se puede efectuar de la manera siguiente:

a) trazar en el dibujo (fig. 464, a la izquierda) desde el centro de la circunferencia (el punto C) una perpendicular al plano Q y llevar sobre esta perpendicular el segmento $CD=R$;

b) construir en el sistema de ejes axonométricos dados con auxilio de las coordenadas de los puntos C y D la proyección axonométrica del segmento CD, o sea, el segmento C_pD_p (fig. 464, a la derecha), que da la dirección del eje menor de la elipse;

c) determinar la dimensión del semieje menor de la elipse, para lo cual trazar desde el punto C_p una perpendicular a C_pD_p, intersecarla con un arco de radio R, descrito desde el punto D_p como centro, y llevar la longitud del segmento obtenido C_pb, igual a $R\cos\varphi$, sobre la recta C_pD_p a ambos lados de C_p; obtendremos el eje menor de la elipse ($b_1b_2=2R\cos\varphi$);

d) llevar sobre la perpendicular, trazada desde el punto C_p a la recta C_pD_p, los segmentos C_pa_1 y C_pa_2, iguales cada uno al radio R de la circunferencia que se representa; obtendremos el eje mayor de la elipse ($a_1a_2=2R$).

La elipse puede ser construida con ayuda de sus ejes hallados [1].

5. El método indicado de construcción de los ejes de la elipse, que representa la proyección axonométrica rectangular de una circunferencia, es también aplicable en los casos cuando *la circunferencia está situada en el plano proyectante*. En este caso se hace innecesaria la construcción de la proyección del segmento con ayuda

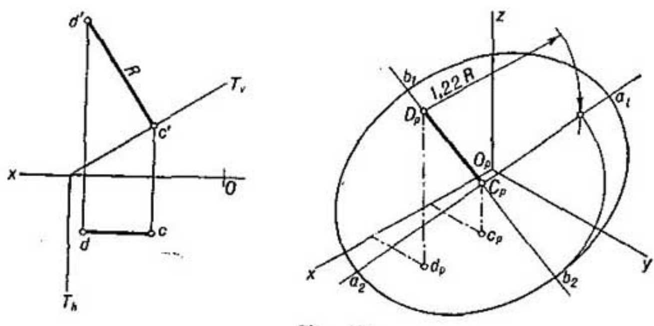


Fig. 465

de su magnitud dada R: si la circunferencia se encuentra sobre el plano T (fig. 465), entonces la perpendicular a este plano es paralela al plano V y, por consiguiente, la proyección sobre este plano es un segmento igual al segmento que se proyecta R.

La construcción se da para dos posiciones: en la fig. 465, la circunferencia de radio R está situada sobre el plano proyectante frontal T, y en la fig. 466 [2], sobre el plano proyectante horizontal S. Lo mismo que en el caso de un plano de posición general, con ayuda de las coordenadas de los puntos C (el centro de la circunferencia que se representa) y D, hay que construir la proyección axonométrica del segmento CD igual a R, determinar la dimensión del semieje

---

[1] En la fig. 464 la construcción se ha efectuado en la proyección isométrica empleando los coeficientes de reducción naturales $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,82\right)$.

[2] En la fig. 465 la construcción se ha ejecutado en la proyección isométrica con los coeficientes de reducción redondeados; por eso en el dibujo se ha tomado $1,22R$. En la fig. 466 la construcción se ha cumplido en la proyección dimétrica con los coeficientes de reducción redondeados; por eso en el dibujo se ha tomado $1,06R$.

menor, con auxilio de la misma construcción que en la fig. 464, y construir la elipse con ayuda de sus ejes hallados.

6. El método de construcción expuesto es aplicable al caso, muy frecuente en la práctica, cuando la circunferencia está situada en un *plano paralelo al plano de proyección.* Supongamos que la circun-

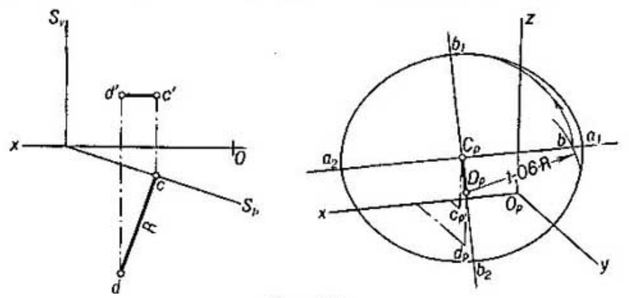


Fig. 466

ferencia está situada en cierto plano horizontal S (fig. 467). En este caso, la perpendicular trazada desde el centro de la circunferencia al plano S, será paralela al eje z y su proyección axonométrica (el segmento D_pC_p) se dispone paralelamente al eje axonométrico O_pz.

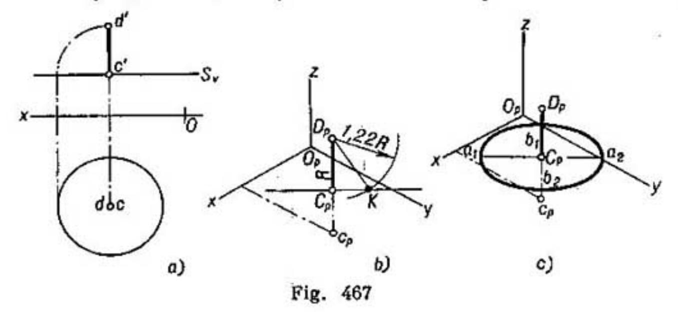


Fig. 467

Pero la proyección axonométrica de esta perpendicular determina la dirección del eje menor de la elipse. Por consiguiente, el eje menor de la elipse, en este caso, es paralelo al eje O_pz y el eje mayor es perpendicular a este eje. Evidentemente, el examen de los casos cuando las circunferencias están situadas en los planos frontal y de perfil nos lleva a la conclusión de que el eje mayor de la elipse en el primer caso será perpendicular al eje O_py, y en el segundo caso, al eje O_px.

El esquema de disposición de los ejes de las elipses, representado en la fig. 468, se obtiene al proyectar en el sistema axonométrico rectangular las circunferencias situadas en planos paralelos respectivamente a los planos de proyección.

La determinación de la dimensión del semieje menor en estos casos puede efectuarse así como se indicó más arriba. Con ayuda de los ejes construidos de la elipse se construyen las propias elipses.

Empleemos esto en las proyecciones isométrica y dimétrica examinadas más arriba.

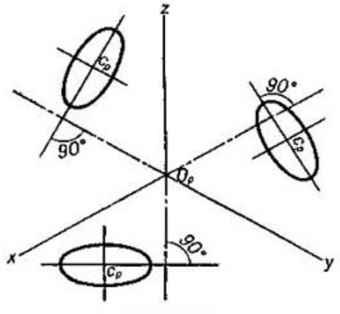


Fig. 468

7. Proyección isométrica. Puesto que el plano de proyección isométrica está inclinado respecto de los planos H, V y W a un mismo ángulo, basta con determinar el semieje menor de la elipse, aunque sea para el caso cuando la circunferencia de radio R está situada sobre un plano paralelo al plano H.

Supongamos que las coordenadas fueron trazadas sin multiplicarlas por 0,82. En este caso C_pD_p (fig. 467, *b* y *c*) es igual a R y desde el punto D_p hay que trazar un arco de radio igual a $1,22R$, que interseca la perpendicular a C_pD_p. Del triángulo rectángulo C_pD_pK obtenemos: C_pK (el eje menor de la elipse)$\approx\sqrt{(1,22R)^2-R^2}\approx0,7R$. A esto le corresponderá el eje mayor igual a $1,22R$.

Si las coordenadas se trazan teniendo en cuenta el coeficiente de reducción 0,82, los semiejes de la elipse se obtienen iguales a: el mayor a R, y el menor a $0,58R$.

Así pues, si la circunferencia de diámentro D está situada en los planos horizontal, frontal o de perfil, entonces en la proyección isométrica, el eje mayor de la elipse es igual a D, y el menor es igual a $0,58D$. *Si se toma la proyección isométrica con los coeficientes de reducción redondeados, entonces los ejes de las elipses indicadas más arriba deben tomarse iguales a* $1,22D$ *y* $0,7D$ *respectivamente.*

A los cuatro puntos (los extremos de los ejes de la elipse) se pueden añadir cuatro puntos más (los extremos de los dos diámetros conjugados de la elipse, paralelos respectivamente a dos de los ejes axonométricos, en dependencia de a cuál de los planos de coordenadas es paralelo el plano sobre el que está situada la circunferencia que se examina). Estos diámetros conjugados, en el caso del aumento indicado más arriba (1,22), son iguales al diámentro de la circunferencia que se representa.

Supongamos, por ejemplo, que hay que construir la proyección isométrica de una circunferencia de diámetro igual a 100 mm, situada en el espacio sobre cierto plano paralelo al plano W. La posición de la elipse se determina por los ejes O_py y O_pz. Tomando en el dibujo, de acuerdo a una u otra condición, el centro C_p (fig. 469) trazamos:

a) una recta perpendicular al eje x, y llevamos sobre ella el eje mayor de la elipse $a_1a_2=122$ mm;

b) una recta paralela al eje x, y llevamos sobre ella el eje menor de la elipse $b_1b_2=70$ mm;

c) una recta paralela al eje y, y llevamos sobre ella el diámetro de la elipse $d_1d_2=100$ mm;

d) una recta paralela al eje z, y llevamos sobre ella el diámetro de la elipse $e_1e_2=100$ mm.

Los ocho puntos hallados permiten reproducir la propia elipse con bastante exactitud incluso a mano. Ordinariamente, al contornear la elipse no se dejan

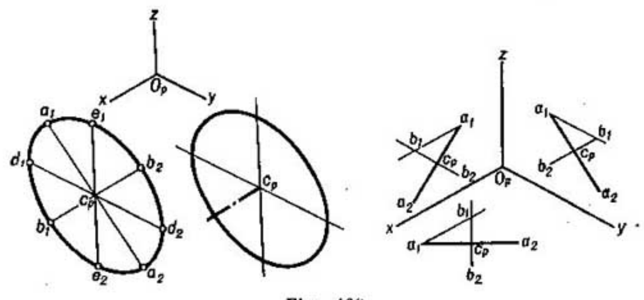


Fig. 469

sus ejes mayor y menor, sino que se indican solamente las direcciones paralelas a los ejes axonométricos, con la particularidad de que una de ellas, la correspondiente al eje perpendicular al plano de la circunferencia que se representa, se señala con línea gruesa.

La dimensión del eje menor puede obtenerse haciendo uso del método indicado en la fig. 469 a la derecha: una vez construido el eje mayor de la elipse a_1a_2 y trazada la perpendicular a este eje desde el centro de la elipse c_p, trazamos desde el extremo del eje mayor (por ejemplo, desde a_1) una recta paralela al eje x, al y o al z hasta su intersección con dicha perpendicular; el segmento c_pb_1 obtenido determina el semieje menor.

8. Proyección dimétrica. Puesto que el plano de proyección dimétrica forma un mismo ángulo solamente con dos planos de proyección H y W, entonces es necesario hallar el eje menor de la elipse para el caso cuando las circunferencias están situadas en planos paralelos a los planos de proyección H y W, y, a parte, para el caso en que la circunferencia está situada en un plano paralelo al plano V.

Empleando una construcción análoga a la indicada en la fig. 467, obtendremos en un caso (fig. 470) $C_pD_p \parallel$ al eje z, y en otro caso $C_pD_p \parallel$ al eje y y, por consiguiente, en el primer caso $C_pD_p=R$,

y en el segundo $C_pD_p=0,5R$, donde R es el diámentro de la circunferencia representada en la proyección dimétrica (es necesario recordar que la proyección dimétrica se construye con los coeficientes de reducción 1 : 0,5 : 1).

De los triángulos rectángulos C_pD_pK (fig. 470) se desprende que en el primer caso C_pK (el semieje menor de la elipse) es igual a

$$\sqrt{(1,06R)^2-R^2}\approx 0,35R,$$

y en el segundo caso es igual a

$$\sqrt{(1,06R)^2-(0,5R)^2}\approx 0,94R.$$

Así pues, si las circunferencias de diámetro D están situadas en los planos horizontal y de perfil (o paralelos a éstos), entonces en la

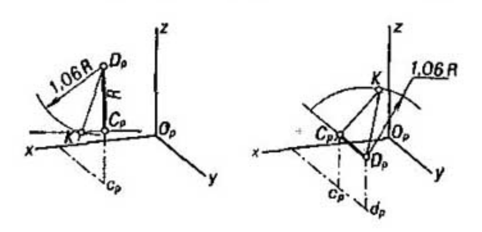


Fig. 470

proyección dimétrica el eje mayor de la elipse se obiene igual a D, y el menor a $\frac{D}{3}$.

Si la circunferencia de diámentro D pertenece al plano frontal (o a un plano paralelo a éste), entonces en la proyección dimétrica de esta circunferencia los ejes de la elipse son iguales: el eje mayor a D, y el menor a $0,88D$.

Pero puesto que la proyección dimétrica se construye con los coeficientes de reducción redondeados, *los ejes de la elipse deben tomarse, para las circunferencias situadas en los planos horizontal y de perfil (o paralelos a estos planos), iguales a* $1,06D$ y $0,35D$, *y para la circunferencia perteneciente al plano frontal (o a un plano paralelo a éste) iguales a* $1,06D$ y $0,94D$.

En la fig. 471 se da la construcción de ocho puntos para cada elipse en la proyección dimétrica. En todos los casos el eje mayor $a_1a_2=1,06D$, los diámetros $f_1f_2=e_1e_2=D$, el diámetro $d_1d_2=0,5D$; en lo que se refiere al eje menor b_1b_2 en dos posiciones es igual a $0,35D$, y en una (cuando es paralelo al eje y) es igual a $0,94D$.

Al contornear las elipses, lo mismo que en la proyección isométrica, se indican sólo las direcciones paralelas a los ejes (véase la fig. 471, a la derecha).

Para la elipse, cuyo eje menor es paralelo al eje y, se puede hallar el punto b_1 trazando desde el punto a_1 una recta paralela al eje x (si desde el punto a_1 se traza una recta paralela al eje z, entonces se obtiene el punto b_2).

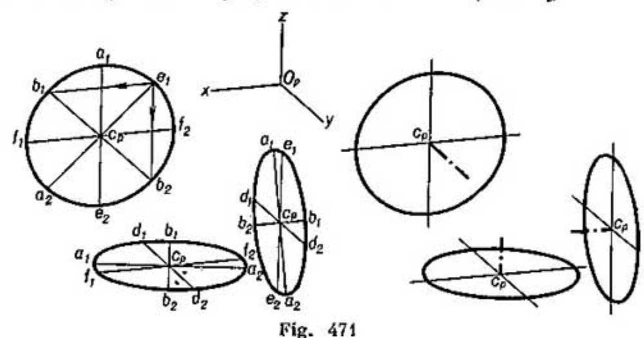


Fig. 471

9. En la pág. 351 se da otra deducción de los valores de los coeficientes para calcular la magnitud del eje menor de la elipse que representa una circunferencia dispuesta en el espacio en el plano de coordenadas xOy, xOz o bien en el yOz (o paralelamente a estos planos). En la fig. 472 están representados los planos de proyección axonométrica abatidos sobre el plano del dibujo, es decir, en posición frontal: 1) el plano de proyección isométrica, 2) el plano de proyección dimétrica (1 : 0,5 : 1), 3) lo mismo, pero con el eje y en posición vertical. En todos los casos se dan además las representaciones sobre un plano auxiliar de perfil, con la particularidad de que vienen representados los planos de proyección axonométrica (P'') y los ejes de coordenadas en su posición con relación al plano de proyección axonométrica para las proyecciones isométrica y dimétrica.

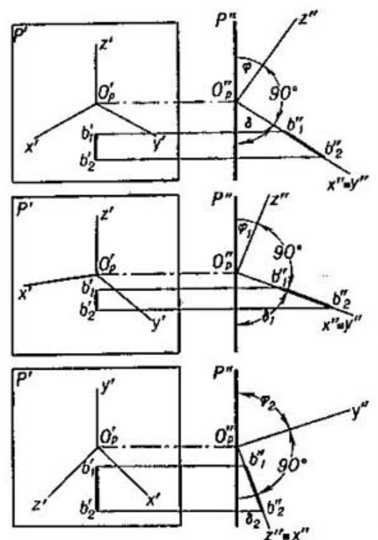


Fig. 472

Dado que en la proyección isométrica los ángulos formados por

los ejes de coordenadas Ox, Oy y Oz con el plano de proyección isométrica son iguales entre sí y el coeficiente de reducción es, en los tres casos, igual a $\sqrt{\frac{2}{3}}$[1], la construcción de la proyección $O''_p z''$ se reduce a la construcción del ángulo φ según el valor de su coseno: $\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Puesto que el eje Oz se encuentra en el espacio sobre el plano de perfil, la proyección de perfil del plano de coordenadas xOy representará una línea recta que forma con $O''_p z''$ un ángulo de 90°.

Ahora se puede pasar al cálculo del coeficiente para determinar la magnitud del eje menor de la elipse al construir la proyección isométrica de la circunferencia referida al plano de coordenadas xOy. De todos los diámetros de la circunferencia, el que más se reducirá será el que forma el ángulo δ con el plano de proyección isométrica. Supongamos que sea el diámetro con las proyecciones $b'_1 b'_2$ y $b''_1 b''_2$ y, además, $b''_1 b''_2$ es igual al diámetro de la circunferencia (teniendo en cuenta la escala del dibujo).

Puesto que $\delta + \varphi = 90°$, entonces, $\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}} = \operatorname{sen}\delta$. Pero para hallar $b'_1 b'_2$ con ayuda de $b''_1 b''_2$ es necesario conocer

$$\cos\delta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\delta} = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0{,}58.$$

Así pues, en la proyección isométrica, para calcular la magnitud del eje menor de la elipse con auxilio del diámetro de la circunferencia, hay que tomar el coeficiente 0,58, y en el recuento al coeficiente de reducción, 0,7. Esto es justo para los tres casos: la circunferencia está situada en el espacio sobre el plano horizontal, sobre el frontal o bien sobre el de perfil.

Pasando, a continuación, a la proyección dimétrica (2^a y 3^a posiciones en la fig. 472), se debe prestar atención en que el plano de proyección dimétrica forma ángulos iguales sólo con dos ejes de coordenadas, con el Ox y el Oz. Por eso vienen dadas dos posiciones (la 2^a y la 3^a): en la primera, la circunferencia se considera en el plano xOy (esto se extiende también al caso de disposición de la circunferencia en el plano yOz), y en la segunda posición la circunferencia se considera situada en el plano xOz.

Guiándonos por los valores del $\cos\varphi$ en la 2^a posición: $\cos\varphi_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, y en la 3^a posición: $\cos\varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$, obtendremos:

$$\cos\delta_1 = \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9}} \approx 0{,}33$$

[1] Todos los cálculos se dan con los coeficientes de reducción naturales, y no con los redondeados.

y

$$\cos \delta_2 = \sqrt{1-\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3} \approx 0,88,$$

y en el recuento a los coeficientes de reducción $\approx 0,35$ y $\approx 0,94$.

§ 74. EJEMPLOS DE CONSTRUCCIONES EN LAS PROYECCIONES ISOMÉTRICA Y DIMÉTRICA

Más abajo se exponen algunos ejemplos de construcciones en las proyecciones rectangulares isométrica y dimétrica.

1. Proyección de la esfera. En la fig. 473, arriba, viene dada la representación de una esfera en las proyecciones isométrica y dimétrica.

En ambos casos la esfera se muestra con una octava parte cortada. Las circunferencias que representan el contorno de las proyecciones, se han descrito:

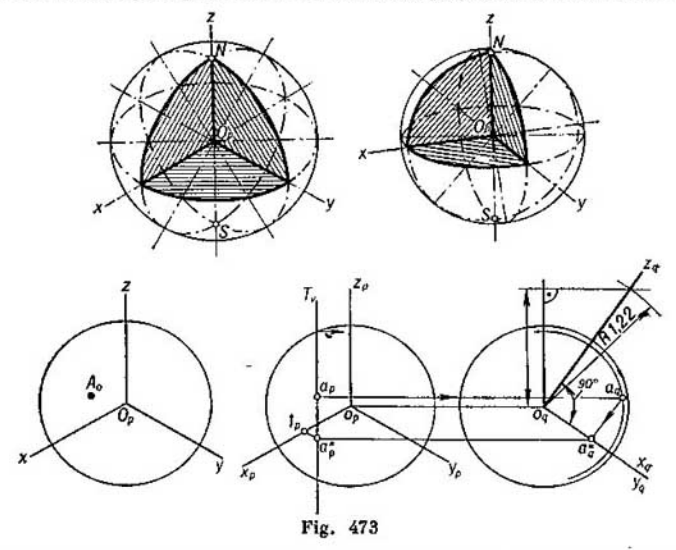


Fig. 473

para la proyección isométrica con un radio igual a $1,22R$, y para la proyección dimétrica, con un radio igual a $1,06R$, donde R es el radio de la esfera. En ambos casos las elipses corresponden a una sección ecuatorial y a dos secciones meridionales.

En la fig. 473, abajo y a la izquierda, viene dada la representación de la esfera en la proyección isométrica; en la parte vista de la esfera se da el punto A. A la derecha se muestra la construcción de la segunda proyección $a_p^{\bullet}$ (véase la fig. 449) y la quebrada de coordenadas de tres elementos $a_p a_p^{\bullet} 1_p O_p$, lo que da la

posibilidad de determinar las coordenadas rectangulares del punto A en el espacio. La construcción se ha efectuado suponiendo que el plano de proyección isométrica ocupa la posición frontal y que los ejes de coordenadas rectangulares x, y y z, que forman con dicho plano ángulos iguales entre sí, se han proyectado no sólo sobre este plano, sino también sobre el plano auxiliar de perfil Q. Se

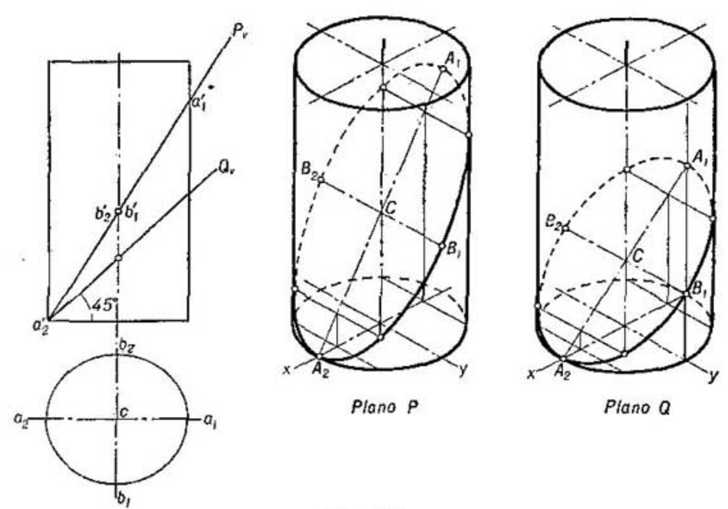


Fig. 474

obtiene el sistema de planos de proyección P, Q y las proyecciones a_p y a_q del punto dado A, con la particularidad de que la proyección a_q se ha obtenido con auxilio del corte de la esfera con el plano T. La segunda proyección del punto A también viene representada por dos proyecciones : a_p^{*} y a_q^{*}.

2. Líneas de intersección de un cilindro y un cono por un plano. En las figs. 474 y 475 se muestra la construcción, en la proyección isométrica, de las líneas de intersección de un cilindro y un cono con planos proyectantes frontales[1]. En los casos que se examinan las líneas de intersección son elipses.

Ante todo, guiándonos por el dibujo, trazamos con ayuda de las coordenadas de los puntos A_1 y A_2 las líneas de inclinación de los planos P y Q. Para construir los puntos de las elipses tomamos planos secantes auxiliares: para el cilindro, paralelamente a sus generatrices y al plano yOz, y para el cono, planos que pasan por su vértice paralelamente al eje y. Estos planos vienen dados por sus trazas, paralelas al eje y, sobre los planos de las bases del cilindro y el cono.

Con tal elección de los planos auxiliares, las rectas según las cuales se cortan con los planos P y Q son paralelas al eje y. En la intersección de estas rectas con las generatrices del cilindro y el cono se obtienen los puntos de la elipse.

[1] La construcción se ha efectuado empleando los coeficientes de reducción redondeados.

En primer lugar se deben hallar tales puntos característicos como los señalados en los dibujos con las letras A_1, A_2, B_1 y B_2, y también los obtenidos en las líneas de contorno en la proyección isométrica. El semieje menor de la elipse que se obtiene en la sección, igual a cb_1, conserva su magnitud también en la proyección isométrica ($cb_1=CB_1$). Pero en la proyección isométrica, el segmento

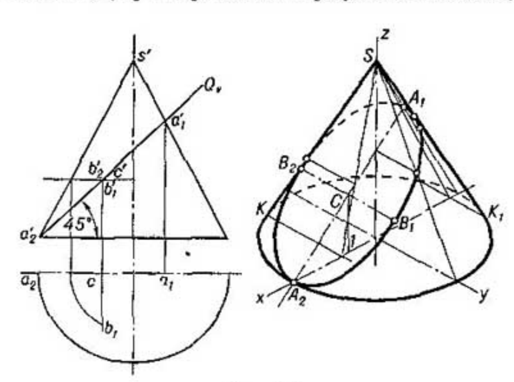


Fig. 475

B_1B_2 conserva su magnitud de eje menor de la elipse solamente en el plano Q, es decir, cuando el ángulo de inclinación de este plano es igual al ángulo de 45° indicado en el dibujo.

Efectivamente, en este caso el segmento B_1B_2, siendo paralelo al eje y, conserva también en la proyección isométrica su posición perpendicular a A_1A_2; por consiguiente, los segmentos A_1A_2 y B_1B_2 conservan su valor de ejes de la elipse. En el caso de otra inclinación del plano, como se muestra en el cilindro para el plano P, los segmentos A_1A_2 y B_1B_2 en la proyección isométrica ya no son los ejes de la elipse, sino sólo sus diámetros conjugados.

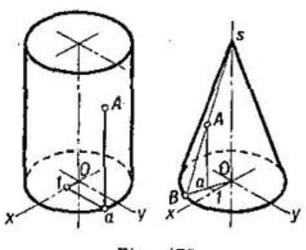


Fig. 476

3. Construcción de los segmentos coordenados para el punto dado en la superficie de un cilindro y un cono de revolución en la proyección axonométrica. En la fig. 476 se dan ejemplos para el cono y el cilindro en la proyección isométrica. En todos los casos el origen de coordenadas se ha tomado en el centro de la base (en el punto O).

Por el punto A dado en el cilindro se ha trazado una recta paralela al eje z, y desde la segunda proyección a se ha trazado una recta paralela al eje y hasta su intersección con el eje x. Los segmentos $O1$, $1a$ y aA permiten determinar las coordenadas del punto A en el sistema dado de ejes de coordenados.

Por el punto A dado en el cono se ha trazado una generatriz y se ha construido la segunda proyección (OB) de esta generatriz. Trazando desde el punto A

una perpendicular hasta su intersección con *OB* obtenemos la segunda proyección del punto *A*. Lo demás está claro del dibujo.

En la fig. 477 se muestra la construcción de los segmentos coordenados para un punto dado en la superficie de un cono truncado de revolución en la proyección isométrica (fig. 477, *a*). Supongamos que nos es conocida la sección producida en el cono por un plano que pasa por el eje del cono y el punto *B* (fig. 477, *b*). En el trapecio obtenido se ha trazado la recta $SA \parallel CD$ y la recta *BO* que corta a *SA* en el punto *K*. Obtenemos que $OK : KB = OA : AD$. Pero esta proporción se conservará también en la proyección isométrica. Construyamos el cono con el

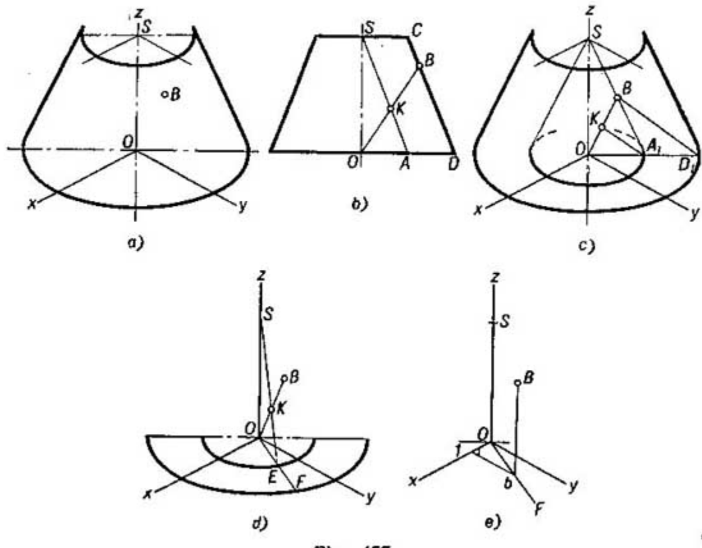


Fig. 477

vértice en el punto *S* y la generatriz paralela a la generatriz del cono truncado (fig. 477, *c*). La relación $OA_1 : A_1D_1$ es idéntica a la relación $OA : AD$ contenida en la proporción indicada más arriba. Ahora se puede obtener el punto *K* sobre *OB* en la fig. 477, *c*. La generatriz trazada por los puntos *S* y *E* determina el punto *K* (fig. 477, *d*) y la proyección *OF* de la generatriz a la cual pertenece el punto *B*. De aquí obtenemos la posibilidad de determinar la segunda proyección *b* (fig. 477, *e*) y los segmentos coordenados *Bb*, *b1* y *O1* que determinan las coordenadas *z*, *y* y *x*.

La construcción indicada se da para el caso, cuando el cono no puede ser construido hasta un cono completo. Si éste se puede construir, entonces la construcción se realiza como se muestra para el cono en la fig. 477, *b*.

4. Ejemplos de construcción de las líneas de intersección de superficies de revolución cilíndrica y cónica entre sí. Las líneas de intersección se construyen con auxilio de puntos; estos puntos se hallan o bien valiéndose de sus coor-

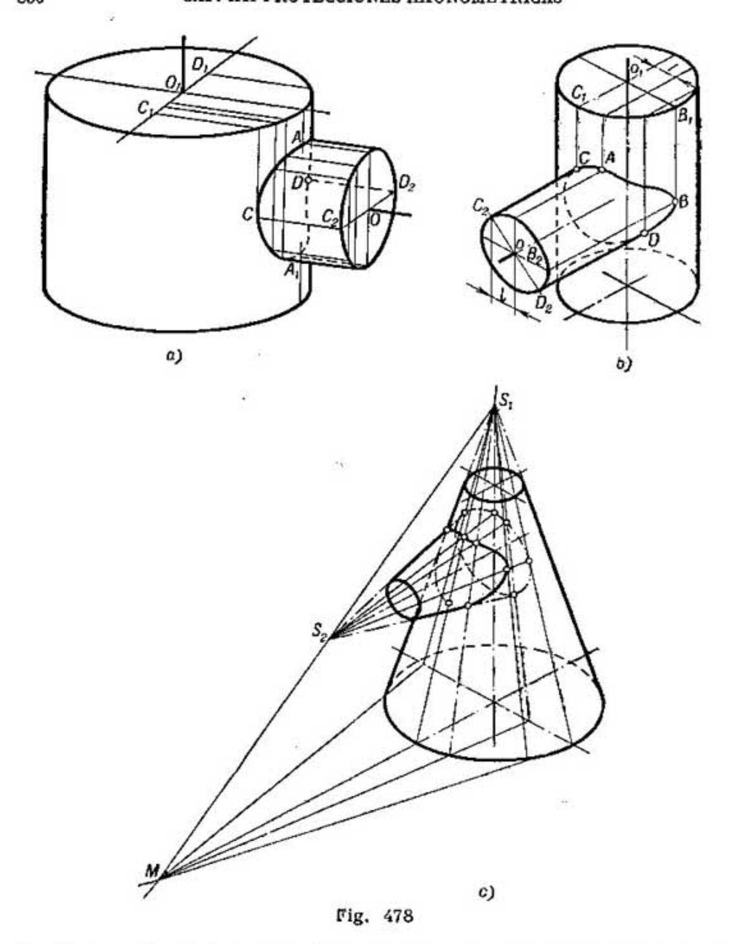


Fig. 478

denadas, tomadas de las proyecciones ortogonales, o bien haciendo uso del método de planos secantes auxiliares directamente en las proyecciones axonométricas. El último caso se muestra en la fig. 478, *a—d*.

Los planos secantes auxiliares cortan a los cilindros y conos dados según líneas generatrices. En la fig. 478, *a* los ejes de los cilindros se cortan, y en la

fig. *b*) se cruzan. Si en la fig. 478, *a* los puntos A y A_1 fueron hallados con ayuda de un plano secante que pasa por los ejes de ambos cilindros, en la fig. 478, *b* hay que tener en cuenta el desplazamiento a la magnitud l[1]. En la fig. 478, *c* los planos secantes pasan por la recta S_1S_2, y sus trazas sobre el plano de la base del cono con el vertice S_1 pasan por la traza de la recta S_1S_2 sobre este plano. En la fig. 478, *d* los planos pasan por la recta MN trazada por el vértice del cono (el punto S) paralelamente a la generatriz del cilindro.

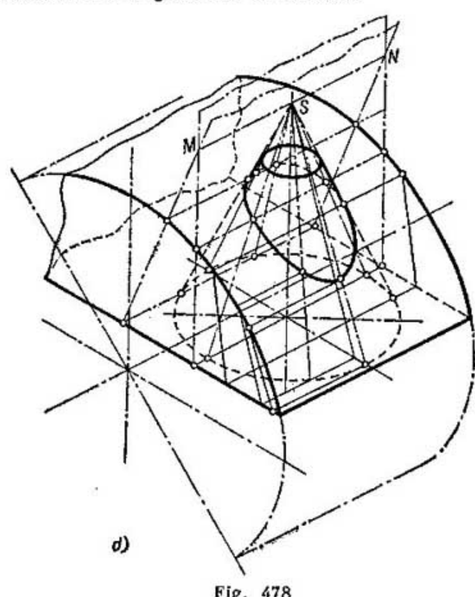


Fig. 478

5. Construcción de los puntos de tangencia de una circunferencia (el contorno de la proyección de una esfera) y una elipse (la proyección de la circunferencia obtenida en la esfera al cortar a ésta con un plano). En la fig. 479, *a* se muestra una esfera cortada por tres planos proyectantes: de perfil (T), horizontal (Q) y frontal (S). Guiándonos por este dibujo se ha construido la proyección isométrica (fig. 479, *b*) empleando los coeficientes de reducción redondeados. La elipse El_1 se ha construido como se mostró en la fig. 469, y la El_2, como en la fig. 465. La proyección de la esfera se da por su contorno (una circunferencia de radio igual a 1,22R). Esta circunferencia hace contacto con la elipse El_1 en el punto K, y con la elipse El_2, en el punto L.

Examinemos cómo se ha hallado el punto K. Este punto se ha obtenido en la circunferencia (en el contorno de la proyección de la esfera), es decir, en el plano de proyección isométrica (P) y al mismo tiempo en la elipse El_1, es decir, en el

[1] La marcación de los puntos con letras se ha realizado solamente para las aclaraciones.

plano T que corta a la esfera. Pero si este punto pertenece simultáneamente a dos planos, entonces pertenece a la línea de intersección de estos planos.

El plano de proyección isométrica, como es conocido, forma ángulos iguales con los planos V, H y W. El triángulo de trazas de este plano es equilátero (véase la fig. 457). Refiriendo el plano P al punto O_p, o sea, al origen de los ejes y al centro de la esfera, obtenemos la posición de las trazas indicada en la fig. 479, *c*.

El plano T en el sistema de los mismos ejes se representará por sus trazas, así como se muestra en la fig. 479, *d*. Hagamos coincidir las figs. 479, *c* y 479, *d* y construyamos la línea de intersección de los planos P y T (fig. 479, *e*): la recta MN pasa por el punto M de intersección de las trazas horizontales paralelamente a la traza P_w, puesto que $T \parallel W$ (en este caso $P_w \perp O_px$, por consiguiente, MN $MN \perp O_px$).

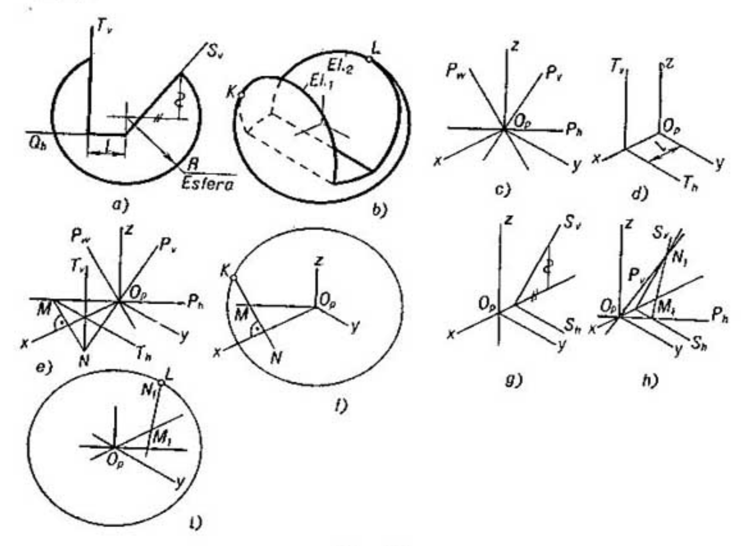


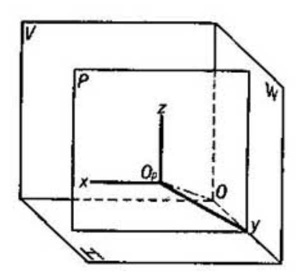
Fig. 479

Ahora queda hallar el punto K en la intersección de la recta MN con la circunferencia que representa la proyección isométrica de la esfera (fig. 479, *f*).

Para determinar la posición del punto L (véase la fig. 479, *b*) hay que representar el plano proyectante frontal S en el sistema de ejes axonométricos (fig. 479, *g*), y luego hallar la recta de intersección de los planos P y S (fig. 479, *h*): esta recta pasa por el punto M_1 de interesección de las trazas S_h y P_h y por el punto N_1 de intersección de las trazas S_v y P_v. El punto buscado L se obtiene en la intersección de la recta M_1N_1 con la circunferencia que representa la proyección isométrica de la esfera (fig. 479, *i*).

§ 75. ALGUNAS PROYECCIONES AXONOMÉTRICAS OBLICUAS

Entre las proyecciones axonométricas *oblicuas* detengámonos, ante todo, en la proyeccion frecuentemente aplicada, obtenida sobre un plano paralelo al plano V. Si el plano de proyección axonométrica P es paralelo al plano V, la dirección de proyección no debe elegirse paralela al plano W, puesto que las proyecciones de los ejes de coordenadas ocuparán una posición, en la cual la representación axonométrica resulta poco intituiva. La dirección de proyección debe elegirse de tal manera que las proyecciones de los ejes de coordenadas sobre el plano P se dispongan tal como se muestra en la fig. 480.



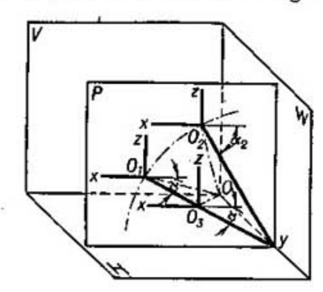


Fig. 480

En este caso, los segmentos en los ejes x y z se proyectan *en verdadera magnitud*, lo mismo que el propio ángulo xO_pz; de este modo, *los coeficientes de reducción de los ejes* O_px y O_pz *en el plano* P *son iguales a la unidad*. En lo que se refiere al eje y, el coeficiente de reducción correspondiente a este eje puede tener diferentes valores, incluyendo la unidad; en el último caso tendremos una *proyección isométrica oblicua*. Si el coeficiente de reducción del eje O_py no es igual a la unidad, entonces la proyección axonométrica oblicua sobre el plano P será *dimétrica*.

El segmento OO_p paralelo a la dirección de proyección, y los segmentos Oy y O_1y determinan al triángulo rectángulo OyO_1 (el ángulo OyO_1 es recto). En efecto, el segmento Oy es perpendicular al plano V, y puesto que el plano P es paralelo al plano V, por lo tanto, el plano P es perpendicular a Oy. Girando el triángulo OyO_1 alrededor del cateto Oy, se pueden obtener distintas posiciones del punto O_1 en el plano P, con la particularidad de quo en todas sus posiciones el punto O_1 se encuentra a una misma distancia del eje y: el lugar geométrico de las posiciones del punto O_1 será una circunferencia descrita desde el punto y con el radio yO_1. En la fig. 480 a la derecha se dan dos de estas posiciones: O_1 y O_2; cada uno de los puntos O_1 y O_2 sirve de origen de los ejes, de los cuales los ejes x y z conservan su dirección, y el eje y cambia de dirección: esto se expresa

por la variación del ángulo α entre los ejes axonométricos x e y. En este caso varía la dirección de proyección (véase en la fig. 480 la dirección de los segmentos OO_1 y OO_2). El ángulo α puede ser elegido arbitrariamente.

Por otra parte, si se toma sobre el plano P el origen de los ejes en el punto O_3 sobre el segmento yO_1, es decir, se toma la dirección de proyección paralelamente a la dirección del segmento OO_3, entonces la magnitud del ángulo α_1 permanece invariable, mientras que O_3y/Oy no es igual a la relación O_1y/Oy; esta relación es el coeficiente de reducción del eje y. Por consiguiente, se puede elegir arbitrariamente tanto la magnitud del coeficiente de reducción del eje y, como la magnitud del ángulo α, con el fin de obtener la representación más clara y expresiva.

A la proyección axonométrica oblicua sobre un plano paralelo al plano V, examinada por nosotros, se le llama *«proyección frontal»* y también *«proyección caballera»* y *«perspectiva caballera»*. Frecuentemente se emplea el caso de proyección frontal cuando el coeficiente de reducción del eje y se ha elegido igual a 0,5 y el ángulo α se ha tomado igual a 45°; a esta proyección se le suele llamar «proyección de gabinete» [1].

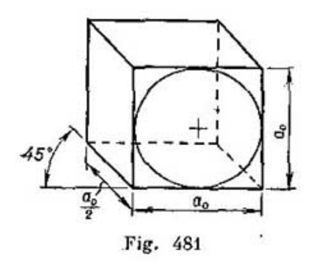


Fig. 481

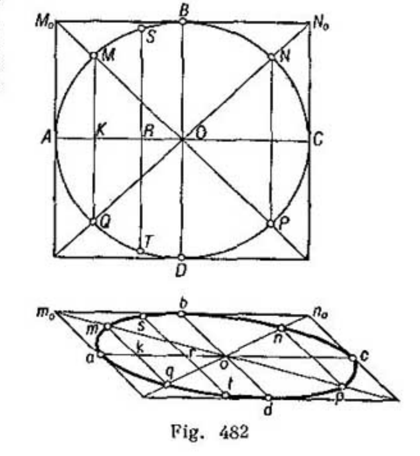


Fig. 482

En la fig. 481 viene dada la representación de un cubo en la proyección de gabinete. La cara anterior repite la proyección sobre el plano V. Por eso, la circunferencia inscrita en esta cara, en la proyección de gabinete es también una circunferencia. De aquí se puede hacer la conclusión de que la proyección de gabinete, que es un método sencillo e intuitivo de representación de cuerpos con configuración rectilínea, es cómoda también para los casos en que hay que operar con circunferencias situadas sobre planos paralelos al plano de proyección axonométrica, es decir, paralelos al plano V.

[1] De la palabra inglesa *Cabinet projection*.

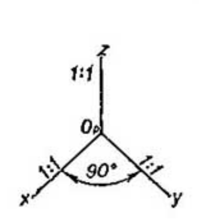
Si hay que representar en la proyección de gabinete una circunferencia situada en un plano paralelo al plano de proyección H y al plano de proyección W, entonces esta circunferencia se inscribe en un cuadrado, se construye un paralelogramo, que es la proyección de gabinete de este cuadrado, luego se fijan en la circunferencia una serie de puntos y se construyen sus proyecciones. Estas estarán situadas sobre la elipse, que representa la proyección de la circunferencia.

En la fig. 482 se muestra la construcción de los puntos de la elipse, que representa la proyección de la circunferencia situada en un plano paralelo al plano H.

Primeramente, la circunferencia se inscribe en un cuadrado y se construye la proyección de este cuadrado. El diámentro AC conserva su magnitud y dirección (obtenemos los puntos a y c); el diámetro BD, perpendicular a AC, ocupará la posición bajo un ángulo de 45° a ac y se reducirá dos veces (los puntos b y d). Las cuerdas MQ y NP, obtenidas al trazar las diagonales del cuadrado, dan cuatro puntos más (m, q, n, p), con la particularidad de que

$$mq=\frac{MQ}{2}, \quad np=\frac{NP}{2}, \quad ok=OK.$$

Luego se ha tomado el segmento arbitrario OR y se ha trazado en la dirección de oa; por el punto r se ha trazado el segmento st paralelo



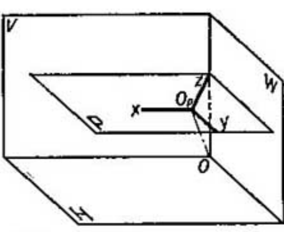


Fig. 483

a bd e igual a ST : 2. Si obtienen dos puntos más (s y t), pertenecientes a la elipse buscada. Procediendo análogamente, se puede hallar una serie de puntos, por los cuales pasa la elipse.

La construcción de la proyección de la circunferencia situada sobre un plano paralelo al plano W es análoga a la examinada.

Señalemos también el caso de proyección axonométrica oblicua, cuando el plano de proyección axonométrica es paralelo al plano H (fig. 483). Para tal disposición del plano P, el ángulo $xO_py=90°$. En lo que se refiere al eje z, obtenido sobre el plano P, el coeficiente de reducción correspondiente a este eje se expresa por la relación $O_pz : Oz$ (los segmentos O_pz y Oz representan los catetos del triángulo rectángulo OzO_p con el ángulo recto en el punto z). En los casos en que

se emplea esta proyección axonométrica oblicua, la dirección de proyección se toma bajo un ángulo de 45° al plano *P* (o al plano *H*). En este caso el segmento O_pz es igual al segmento Oz, es decir, el coeficiente de reducción del eje z se obtiene igual a la unidad y la proyección resulta isométrica.

PREGUNTAS AL CAPÍTULO XII

1. ¿En qué consiste el método de proyección axonométrica?
2. ¿A qué se le llama coeficientes de reducción?
3. ¿A qué se le llama segunda proyección de un punto?
4. ¿Cómo se realiza el paso de las coordenadas rectangulares a las axonométricas?
5. ¿En qué consiste el «teorema principal de la axonometría»?
6. ¿En cuáles casos la proyección axonométrica se llama: a) isométrica, b) dimétrica, c) trimétrica?
7. ¿Cuál es la diferencia entre las proyecciones axonométricas oblicua y rectangular?
8. ¿Cuál línea es la configuración de la proyección axonométrica de una esfera: a) oblicua, b) rectangular?
9. ¿A qué es igual la suma de los cuadrados de los coeficientes de reducción para la proyección axonométrica rectangular?
10. ¿A qué son iguales los coeficientes de reducción para la proyección rectangular: a) isométrica, b) dimétrica (con la relación de los coeficientes 1 : 0,5 : 1; y cuáles son estos coeficientes en forma redondeada (hasta la unidad)?
11. ¿A qué se le llama «triángulo de las trazas» y cuáles deducciones se pueden sacar de él en las proyecciones axonométricas rectangulares?
12. ¿Cómo se construyen los ejes en las proyecciones rectangulares: a) isométrica, b) dimétrica (1 : 0,5 : 1)?
13. ¿Cómo se determina la dirección y la magnitud del eje menor de la elipse, que es la proyección isométrica o dimétrica de la circunferencia situada en: a) un plano de posición general, b) planos proyectantes frontal y horizontal, c) planos frontal, horizontal y de perfil?
14. ¿En cuáles casos la proyección axonométrica rectangular de la circunferencia puede ser el segmento de una recta o una circunferencia?
15. ¿Cómo determinar las coordenadas de los puntos dados en la proyección axonométrica rectangular sobre la superficie: a) de una esfera, b) de un cilindro de revolución, c) de un cono de revolución?
16. ¿A cuál proyección axonométrica oblicua se le llama: a) frontal o caballera, b) de gabinete?

APÉNDICE

§ 76. SOBRE LA CORRESPONDENCIA AFÍN Y SU APLICACIÓN A LA RESOLUCIÓN DE CIERTOS PROBLEMAS

Examinemos la *correspondencia afín* de las figuras situadas sobre dos planos que se cortan o sobre un plano en el sistema de proyección paralela.

En la fig. 484 los puntos A_1 y B_1 del plano T se han proyectado paralelamente en dirección dada por la flecha, sobre el plano P. Las rectas proyectantes A_1A_2 y B_1B_2 determinan al plano proyectante que corta a los planos T y P según las rectas CB_1 y CB_2, convergentes en el punto C de la recta MN.

Si se toma en el plano T cierta recta A_1B_1, la proyección de esta recta sobre el plano P, en su prolongación se encontrará en la línea de intersección de los planos T y P con la propia recta A_1B_1.

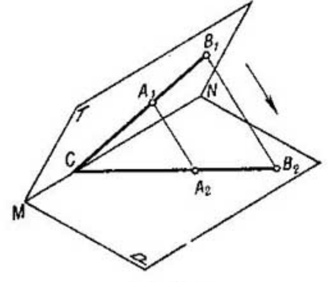


Fig. 484

La proyección paralela de los puntos del plano T sobre el plano P establece entre estos planos cierta correspondencia: al punto A_1 en el plano T le corresponde el punto A_2 en el plano P, al punto B_1, el punto B_2, etc. Esta correspondencia posee las propiedades principales siguientes:

1) a cada punto de un plano le corresponde un punto único en el otro plano (la correspondencia es biunívoca);

2) si sobre una recta, perteneciente a uno de los planos, se ha establecido la existencia de dos puntos correspondientes a los puntos de la recta situada sobre el otro plano, entonces estas rectas corresponden una a la otra, con la particularidad de que a cada punto de una de estas rectas le corresponde un punto determinado de la otra recta;

3) la recta perteneciente a uno de los planos se corta con la recta correspondiente, perteneciente al otro plano, en un punto situado sobre la línea de intersección de ambos planos[1)].

[1)] Si estas rectas son paralelas a la línea de intersección de los planos, el punto de intersección de las rectas es un punto infinitamente alejado.

4) la recta según la cual se cortan ambos planos, corresponde a sí misma;

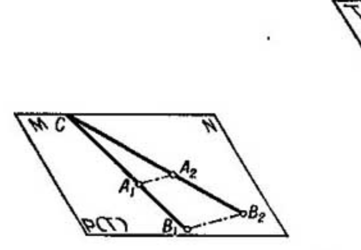
5) si las rectas de un plano son paralelas entre sí, entonces las rectas correspondientes del otro plano también serán paralelas entre sí;

6) la relación de dos segmentos situados en uno de los planos y pertenecientes a una misma recta o a rectas paralelas entre sí, es igual a la relación de los segmentos correspondientes del otro plano.

La correspondencia examinada entre dos planos, que posee las propiedades enumeradas, se llama *correspondencia afín* o, abreviadamente, *afinidad*. En la fig. 484, los puntos A_2 y B_2 *son afines* a los puntos A_1 y B_1; la recta A_2B_2 *es afín* a la recta A_1B_1.

Si se toma en el plano T una figura cualquiera y en el plano P se examinan los puntos afines a todos los puntos de e ta figura, entonces el conjunto de los últimos da en el plano P una figura afín a la figura tomada sobre el plano T.

La recta MN de intersección de los planos se llama *eje de afinidad*.



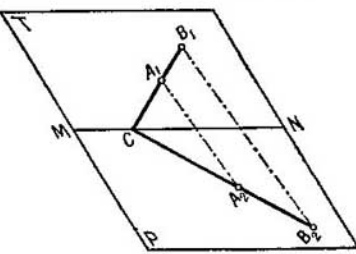


Fig. 485

En la fig. 485 a la izquierda, los mismos planos se dan en posición abatida: el plano T, girándolo alrededor de la recta MN se ha abatido sobre el plano P.

Si se toma el sentido inverso de giro, obtendremos la disposición de los planos abatidos, mostrada en la fig. 485 a la derecha.

Si entre los planos T y P en el espacio fue establecida la correspondencia afín, entonces también después de abatir estos planos (fig. 485) entre los puntos, rectas y figuras pertenecientes a estos planos tendrá efecto la correspondencia afín, cuyas propiedades coincidirán con las propiedades de afinidad establecidas en la proyección paralela. En efecto, en ambos casos a una línea recta le corresponde una recta, a un punto de una de las rectas le corresponde un punto determinado de la otra recta, la relación $\frac{CA_1}{A_1B_1}$ se conserva igual a la relación $\frac{CA_2}{A_2B_2}$ y el paralelismo de las rectas proyectantes A_1A_2 y B_1B_2 (fig. 484) se convierte en paralelismo de las rectas A_1A_2 y B_1B_2 en la fig. 485 al abatir los planos.

Ahora bien, independientemente de si examinamos rectas afines en el espacio o en planos abatidos, *las rectas afines se cortan en el eje de afinidad y los puntos, correspondientes uno a otro, están situados en rectas paralelas entre sí.*

La dirección de la recta A_1A_2 ahora ya no es la dirección de proyección (como en la fig. 484); a esta dirección la llamaremos *dirección de afinidad.*

Si en el dibujo de dos planos abatidos vienen dados el eje de afinidad y dos puntos, afines uno al otro, entonces para cada punto cualquiera de la afinidad dada se puede hallar su punto afín. Supongamos (fig. 486) que la recta MN es el eje de afinidad, los puntos A_1 y A_2 son puntos afines y, por consiguiente, A_1A_2 es la dirección de afinidad. Hay que hallar el punto afín para el punto B_2. Trazamos la recta B_2A_2 hasta su intersección con MN: por los puntos C y A_1

trazamos una recta, sobre la cual hallamos el punto B_1 afín al punto B_2, trazando la recta B_2B_1 paralelamente a A_2A_1.

Sabiendo construir los puntos afines, se puede construir una figura afín a cualquier figura dada.

Si la figura dada e un polígono, entonces su figura afín será también un polígono con la misma cantidad de lados, y para su construcción basta hallar los puntos, afines a los vértices, y unirlos con segmentos rectilíneos. Si la figura dada es curvilínea, entonces la construcción de su figura afín se efectúa con ayuda de varios puntos de la misma; por los puntos obtenidos se traza una curva.

Al examinar una figura, afín a la figura dada, observamos que la magnitud de los ángulos no se conserva en general (véase, por ejemplo, la fig. 491: los ángulos del cuadrilátero *abcd* no son iguales a los ángulos homólogos en el cuadrilátero afín $A_0B_0C_0D_0$).

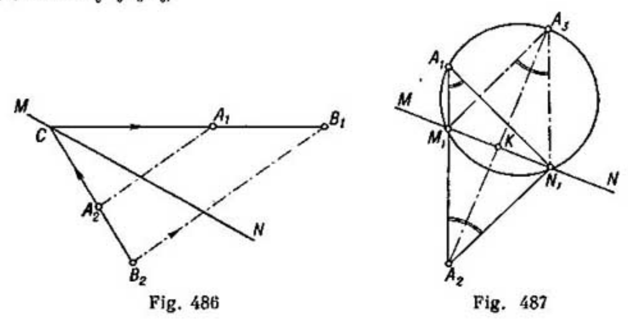


Fig. 486 Fig. 487

No obstante, siendo dado el eje de afinidad MN (fig. 487), al par de puntos afines A_1 y A_2 y al par de rectas afines A_1M_1 y A_2M_1, que pasan por estos puntos, se puede construir otro par más de rectas afines A_1N_1 y A_2N_1 de tal modo que el ángulo $M_1A_1N_1$ sea igual al ángulo $M_1A_2N_1$. Desde el punto A_2 se ha levantado una perpendicular a la recta MN y se ha construido el punto A_3 de modo tal, que $A_2K=KA_3$. Por los puntos A_1, A_3 y M_1 se ha trazado una circunferencia que corta a la recta MN también en el punto N_1. Lo demás está claro del dibujo.

En la correspondencia afín de dos planos, dados por el eje y dos puntos afines A_1 y A_2, se pueden construir dos direcciones perpendiculares entre sí de uno de los planos, que corresponden a dos direcciones perpendiculares entre sí del otro plano. *Tales direcciones se llaman principales en la correspondencia afín dada.* La construcción se muestra en la fig. 488. El segmento A_1A_2 se ha dividido por la mitad en el punto K y por este punto se ha trazado la perpendicular a A_1A_2 hasta su intersección con MN en el punto C. Desde el punto C se ha descrito una circunferencia por los puntos A_1 y A_2. Se han obtenido dos pares de rectas afines: A_1M y A_2M, A_1N y A_2N. Los ángulos MA_1N y MA_2N son rectos.

La figura afín a la circunferencia será en general una elipse, con la particularidad de que los diámetros perpendiculares entre sí de la circunferencia pasan a ser los diámetros conjugados de la elipse.

En la fig. 489 vienen representados el eje de afinidad MN y dos puntos afines C_1 y C_2, siendo el punto C_1 el centro de la circunferencia dada. La dirección de afinidad C_1C_2 es perpendicular al eje. Se ha construido la figura afín a la circunferencia: la elipse con centro C_2. Los semiejes de la elipse A_2C_2 y B_2C_2 se

han obtenido como rectas afines a dos radios perpendiculares entre sí A_1C_1 y B_1C_1. En el caso dado, el ángulo recto A_2C_2K, afín al ángulo recto A_1C_1K, se ha obtenido trazando la recta $A_2C_2 \| MN$, puesto que $C_1A_1 \| MN$.

En la fig. 490 se muestra la construcción de los semiejes A_2C_2 y B_2C_2 de la elipse afín a la circunferencia de centro C_1, cuando la dirección de afinidad

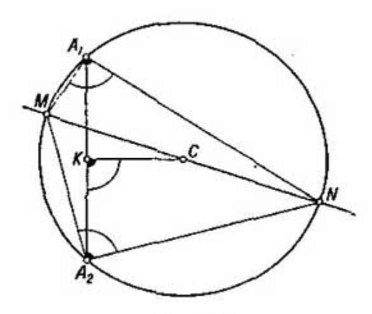


Fig. 488

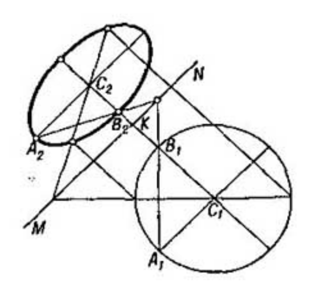


Fig. 489

C_1C_2 no es perpendicular al eje de afinidad. Se ha empleado una construcción auxiliar, como la de la fig. 488, para determinar las direcciones principales MC_1 y NC_1, MC_2 y NC_2, que definen la dirección de los diámetros perpendiculares entre sí de la circunferencia, que se transforman en ejes de la elipse (en la fig. 490 se muestra la construcción de los semiejes A_2C_2 y B_2C_2 solamente).

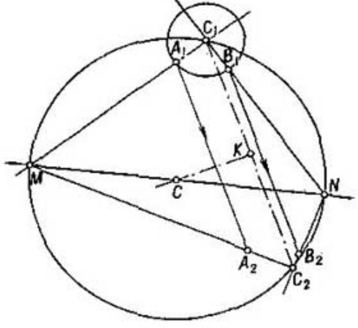


Fig. 490

Si se toma cierto plano de posición general en el sistema de planos V, H y W, entonces, entre el plano P y cada uno de los planos de proyección tiene efecto la correspondencia afín mencionada más arriba, puesto que la proyección ortogonal es un caso particular de la proyección paralela general. Las trazas del plano P serán los ejes de afinidad: la traza P_h, para los planos P y H, la traza P_v, para los planos P y V, y la traza P_w, para los planos P y W. La recta situada sobre el plano P, y cada una de sus proyecciones, se cortan en las trazas correspondientes del plano, es decir, en los ejes de afinidad.

En la fig. 491 se da la construcción del cuadrilátero $A_0B_0C_0D_0$ (su vista natural) como figura afín a la proyección *abcd*. La traza P_h del plano proyectante frontal en el que se encuentra el cuadrilátero dado, sirve de eje de afinidad; la dirección de afinidad es perpendicular a P_h. Hallamos por el metódo corriente (por el método de abatimiento) el punto C_0, afín al punto c, y luego construimos los puntos A_0, B_0 y D_0 por el esquema indicado en la fig. 486.

La fig. 492 muestra que *entre las proyecciones horizontal y frontal de toda figura plana* (en el caso dado un triángulo) *existe correspondencia afín*.

Primero señalamos que las rectas que unen los puntos a y a', b y b', c y c', son paralelas entre sí. A continuación, debe establecerse que dos rectas cualesquiera, correspondientes una a la otra, se cortan en una misma recta. Prolonguemos las rectas ab y $a'b'$ hasta su intersección. El punto m_2 representa simultáneamente las proyecciones horizontal y frontal de un punto perteneciente a la

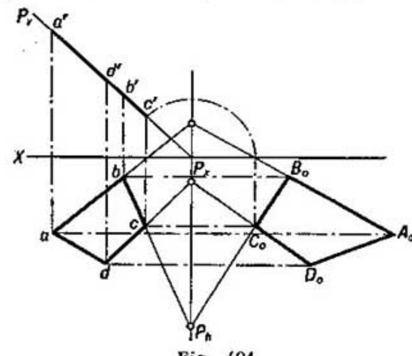


Fig. 491

recta AB en el espacio. La coincidencia de las proyecciones demuestra que este punto se encuentra a iguales distancias de los planos H y V.

Lo mismo se puede decir respecto a los puntos m_1 y m_3. La equidistancia de los puntos de los planos H y V permite deducir que estos puntos, perteneciendo

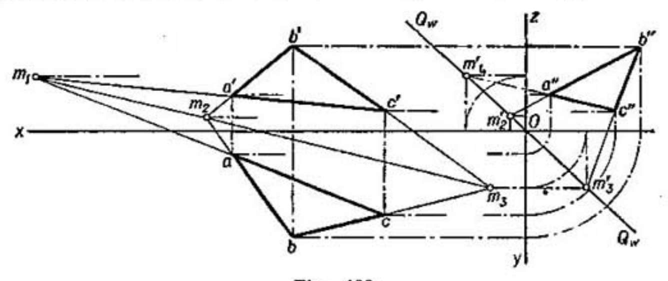


Fig. 492

al plano del triángulo ABC, se encuentran al mismo tiempo en el plano que divide al segundo y cuarto diedros (cuadrantes) del espacio por la mitad.

En la fig. 492 este plano viene expresado por su traza Q_w. Puesto que los puntos examinados deben pertenecer simultáneamente a dos planos (al plano Q y al plano del triángulo ABC), entonces, es obvio que deberán estar situados sobre la línea de intersección del plano del triángulo ABC y el plano Q. Esta recta,

encontrándose en el plano que divide al segundo y cuarto diedros (cuadrantes) del espacio por la mitad, se representará en los planos H y V por una misma recta (las proyecciones horizontal y frontal coinciden), y, por consiguiente, los puntos m_1, m_2 y m_3 están situados sobre una misma recta, que sirve de eje de afinidad. Las proyecciones de toda recta situada en el plano del triángulo ABC, se cortan en el eje de afinidad hallado[1].

Ahora bien, las proyecciones abc y $a'b'c'$ son afines; la dirección de afinidad es perpendicular al eje x, el eje de afinidad se dispone, en general, bajo cierto ángulo al eje x. En el caso, cuando el plano de la figura dada pasa por el eje x, el eje de afinidad de las proyecciones horizontal y frontal coincide con el eje x.

Para las proyecciones horizontales y frontales de todas las figuras coplanares, se obtiene un eje de afinidad común; en efecto, este eje representa las proyecciones confundidas horizontal y frontal de la línea de intersección de cierto plano con el plano permanente Q (fig. 492).

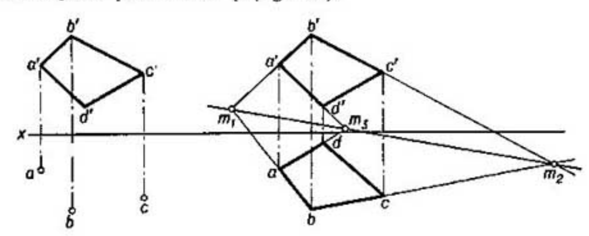


Fig. 493

En la fig. 493 la correspondencia afín se ha empleado para construir la proyección horizontal del cuadrilátero, si se conoce su proyección frontal $a'b'c'd'$ y las proyecciones horizontales de tres de sus vértices (los puntos a, b y c).

En primer lugar se han hallado los puntos m_1 y m_2 y con ello se ha determinado el eje de afinidad. Luego la recta $a'd'$ se ha prolongado hasta su intersección con el eje de afinidad, y el punto obtenido m_3 se ha unido con una recta con el punto a.

El punto buscado d se obtendrá en la intersección de la recta am_3 con la línea de referencia $d'd$. Queda unir entre sí con rectas los puntos a y d, y los puntos c y d.

En la fig. 494 a la izquierda, la correspondencia afín se ha empleado para hallar las proyecciones del punto de intersección de la recta EF con el plano dado por dos rectas paralelas AB y CD.

El problema se reduce a la determinación en las rectas ef y $e'f'$ los puntos afines unos a los otros en la correspondencia afín dada. Esta correspondencia queda determinada por dos puntos afines cualesquiera (en la fig. 494 se han tomado los puntos g y g') y el eje de afinidad, trazado por los puntos m_1 y m_2, hallados en la intersección de las rectas ab y $a'b'$, cd y $c'd'$. Si, a continuación, se construye una recta afín a la recta $e'f'$, entonces, con ello nosotros trazamos en el plano, dado por las rectas AB y CD, una nueva recta que se encuentra al mismo tiempo en un mismo plano con la recta dada EF (la proyección frontal común $e'f'$).

La construcción de la recta afín a la recta $e'f'$ se ha cumplido de la manera siguiente: valiéndonos de los puntos afines g y g' y del punto t' elegido arbitra-

[1] Si la recta está situada en el plano del triángulo ABC y es paralela al eje de afinidad, entonces ella se corta con el eje de afinidad en el infinito; sus dos proyecciones son paralelas al eje de afinidad.

riamente sobre la recta $e'f'$, construimos el punto t afín al punto t'; si, luego, se halla el punto m_3 y se traza por él y por el punto t una recta, entonces se determinará una recta afín a la recta $e'f'$. Queda señalar el punto k en el que se cortan las rectas im_3 y ef. Este punto k es la proyección horizontal del punto de intersección buscado.

En la fig. 494 a la derecha se muestra la resolución de este problema, pero, empleando el procedimiento expuesto en el § 25: por la recta EF se ha trazado el plano S, se ha construido la recta con las proyecciones $1'2'$ y $1-2$, según la cual el plano S corta al plano dado, se ha obtenido la proyección k del punto buscado, y con ayuda de ésta, la proyección k'. Esta construcción es más sencilla que la mostrada en la fig. 494, a la izquierda.

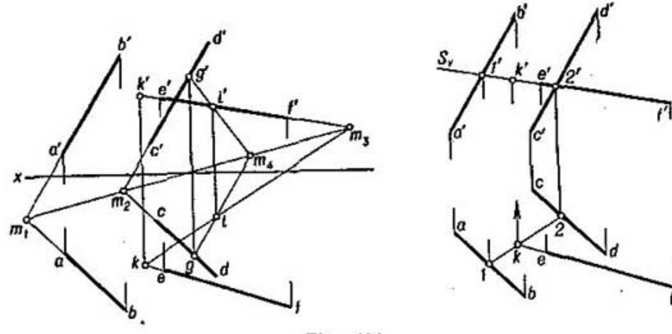


Fig. 494

Pero en el ejemplo dado en la fig. 495, el empleo de la correspondencia afín permite construir los ejes de la elipse (lo que no se hizo en las figs. 364—366 en el § 56), sin recurrir al paso de sus diámetros conjugados a los ejes.

Sin explicar la determinación de una serie de puntos de la elipse, que representa la proyección frontal de la sección producida en un cilindro por un plano (esto ya se hizo en el § 56), aquí nos detendremos solamente en la construcción de los ejes de la elipse.

Las proyecciones de la figura sección (una elipse y una circunferencia) son afines si la dirección de afinidad es perpendicular al eje x. El eje de afinidad (la recta MN) se construye con auxilio de las proyecciones afines en la misma afinidad $k'o'$ y ko, y también aunque sea la traza P_v y el eje x: hallando el punto k y trazando por él y por P_x una recta, obtenemos el eje de afinidad. Ahora, haciendo uso del artificio mostrado en la fig. 490 hallamos las direcciones perpendiculares entre sí: para la proyección frontal No' y Mo' y para la proyección horizontal No y Mo, con ayuda de los puntos 3 y 4 hallamos los vértices de la elipse $3'$ y $4'$ en su eje mayor, y auxiliándonos de los puntos 5 y 6 determinamos los vértices $5'$ y $6'$ en su eje menor.

En la fig. 496 se examina el caso de intersección de un cono oblicuo por un plano, dado por las rectas que se cortan AB y BC.

El eje de afinidad, que junto con un par de puntos afines, por ejemplo, a y a', define la correspondencia afín, pasa por los puntos m_1 y m_2 de intersección de las proyecciones ab y $a'b'$, bc y $b'c'$. La dirección de afinidad es perpendicular al eje x.

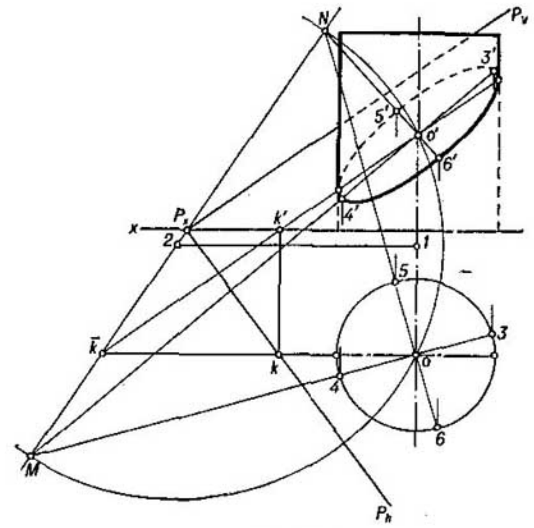


Fig. 495

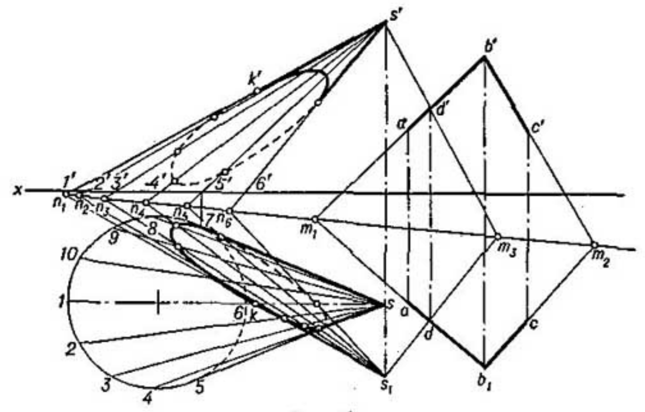


Fig. 496

Puesto que la sección buscada del cono se encontrará en el plano determinado por las rectas AB y BC, el problema se reduce a hallar en las proyecciones del cono una serie de pares de puntos afines en la afinidad dada.

Construimos el punto s_1 afín al punto s' (con ayuda del par de puntos afines d y d' y el punto m_3 en el eje de afinidad).

Si se prolongan las proyecciones frontales de las generatrices del cono hasta su intersección con el eje de afinidad en los puntos n_1, n_2, n_3, etc., y luego se unen todos estos puntos con el punto s_1 por medio de rectas, se determina una serie de rectas situadas sobre el plano dado; las proyecciones de estas rectas son afines unas a las otras.

Tomando un punto en la intersección de la proyección horizontal de la generatriz con aquella de las proyecciones horizontales s_1n_1, s_1n_2, etc., que es afín a la proyección frontal de esta generatriz, obtendremos la proyección horizontal del punto perteneciente a la figura de la sección producida en el cono por el plano dado. Por ejemplo, el punto k se ha obtenido en la intersección de las rectas s_1n_1 y $s1$; hallamos la proyección frontal correspondiente k' Por consiguiente, se ha hallado el punto K, que está situado sobre la generatriz del cono y al mismo tiempo pertenece al plano dado.

Hallando de modo semejante una serie de puntos, obtenemos la posibilidad de construir las elipses que representan las proyecciones de las líneas de la sección.

PREGUNTAS AL § 76

1. ¿Cuáles son las propiedades principales de la correspondencia entre dos planos que se cortan en la proyección paralela?
2. ¿Cómo se le llama a tal correspondencia?
3. ¿Qué significa eje y dirección de afinidad?
4. ¿A cuáles direcciones se les llama principales en la correspondencia afín dada?
5. ¿Cuál figura es afín a la circunferencia?
6. ¿Cómo se construyen los ejes de la elipse afín a la circunferencia dada, cuando la dirección de afinidad no es perpendicular al eje de afinidad?
7. ¿Cómo demostrar que entre las proyecciones frontal y horizontal de cualquier figura plana existe correspondencia afín?
8. ¿En cuál caso el eje de afinidad de las proyecciones frontal y horizontal de una figura plana coincide con el eje de proyección V/H?

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés y árabe. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica; manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a Editorial MIR, I Rizhski per. 2, 129820 Moscú GSP 1—110, URSS.

LA EDITORIAL "MIR" PUBLICA LOS TÍTULOS SIGUIENTES DE MATEMATICAS:

GOLOVINA L.

ALGEBRA LINEAL Y SUS APLICACIONES.

La autora de este libro, candidata a doctor en ciencias físicomatemáticas, durante muchos años de docencia en la facultad de mecánicomatemática de la Universidad Lomonósov de Moscú.

No obstante su pequeño volumen, el libro contiene problemas fundamentales del curso de álgebra lineal, así como sus distintas aplicaciones, incluyendo la investigación de las curvas y superficies de segundo orden, la noción sobre tensores y otros problemas.

En el libro se exponen los conceptos primordiales referentes a los espacios lineales y euclidianos, y transformaciones lineales; se estudian problemas sobre vectores y se obtiene la forma canónica de las matrices de las transformaciones autoconjugada y ortogonal en el espacio euclidiano, dándose ejemplos básicos de la teoría de las formas cuadráticas.

Un mérito evidente del libro es la elección acertada del material, en el cual se han examinado los problemas que no entran en el programa para los estudiantes de especialidades no matemáticas, pero que son de cierto interés para éstos. Con ello, las nociones indispensables previas y el nivel de la exposición son tales que, al leer el texto, los estudiantes no encuentran ningunas dificultades.

El libro está destinado para los estudiantes y profesores de centros de enseñanza superior. Tambien será de gran utilidad para los ingenieros que deseen conocer las nociones fundamentales del álgebra lineal mediante una fuente que no exige información previa de las matemáticas superiores.

GORDÓN V. Y OTROS.

PROBLEMAS DE GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

Este libro ha sido confeccionado de acuerdo con el material expuesto en el manual de V. O. Gordón "Curso de Geometría descriptiva" y es un complemento de éste. Sin embargo, esto no excluye la posibilidad de utilizar otros manuales, puesto que para la comprensión de los problemas de dicho libro solamente se exige el conocimiento de las tesis fundamentales que debe tener todo manual.

Esta recopilación demuestra el proceso para resolver los problemas tipo, los que aclaran las tesis fundamentales del curso de geometría descriptiva, dándose soluciones detalladas de una serie de problemas.

Al final del libro se encuentran las respuestas a los problemas propuestos. Estas respuestas se dan en forma textual o gráfica, en función del carácter de los problemas.

La selección de problemas según su cantidad y contenido garantiza la debida fijación del material teórico del curso general de geometría descriptiva.

En el compendio los problemas sobre geometría descriptiva han sido elegidos según el programa para los estidiantes de especialidades de construcción de maquinaria, de aparatos y mecánico-tecnológicas de los centros de enseñanza técnica superior.

POGORÉLOV A.

GEOMETRÍA ELEMENTAL

El autor del presente manual A. Pogorélov es profesor de la Universidad de Járkov, miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de la URSS, laureado con el Premio Lenin.

Este libro es una modificación substancial de dos libros del mismo autor ya editados: "Planimetría (1969) y "Estereometría (1970). Ante todo, se presta la mayor atención a la axiomática. Además, el manual contiene una exposición elemental, pero muy estricta, de la estereometría. De una forma preclara se explica la temática sobre el área de la superficie. Muchas demostraciones han sido mejoradas y simplificadas, lo cual facilita la aplicación del manual en las escuelas.

Cada párrafo termina con un cuestionario, que facilita la repetición del material, y ejercicios que permiten controlar la asimilación de cada apartado.

Este libro se recomienda para los estudiantes de las escuelas pedagógicas superiores, profesores, así como para los alumnos de las escuelas de enseñanza secundaria.